Проблема трех небесных тел

Three-body problem

Научная статья

УДК 372.853 DOI 10.47639/0130-5522_2023_1_

В.Ф. Очков, д.т.н., профессор, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва; ochkovvf@mpei.ru **Ю.В. Чудова**, к.т.н., доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва; cudovayv@mpei.ru	**V.F. Ochkov**, DrSci (Technical Sciences), Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University); ochkovvf@mpei.ru **Y.V. Cudova**, Dr, Ass. professor, Moscow Aviation Institute (National Research University); cudovayv@mpei.ru
Ключевые слова: небесная механика, проблема трех тел, численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, SMath	**Keywords:** celestial mechanics, three-body problem, numerical solution of a system of ordinary differential equations, SMath
Аннотация. В статье описано создание и решение дифференциального уравнения движения трех небесных тел. Для численного решения задачи используется отечественный физико-математический пакет SMath. Проведено сравнение численного метода решения с аналитическим.	**Abstract.** The article describes the creation and solution of the differential equation of motion of three celestial bodies. For the numerical solution of the problem, the Russian physical and mathematical package SMath is used. The numerical solution method is compared with the analytical one.

Творчество Льва Николаевича Толстого затронуло не только комету 1812 года [**1**], но и еще одну «небесную» тему – движение не двух, а трех небесных тел [**2**]. Вот что можно прочесть в романе «Воскресение»: «*– Ну, что проблема трех тел? – прошептал еще Крыльцов и трудно, тяжело улыбнулся. – Мудреное решение? Нехлюдов не понял, но Марья Павловна объяснила ему, что это знаменитая математическая проблема определения отношения трех тел: солнца, луны и земли, и что Крыльцов шутя придумал это сравнение с отношением Нехлюдова, Катюши и Симонсона. Крыльцов кивнул головой в знак того, что Марья Павловна верно объяснила его шутку.*»

Проблема двух небесных тел имеет аналитическое решение. Два небесных тела вращаются относительно друг друга по так называемым коническим траекториям. Почему коническим? Если круговой конус рассечь плоскостью, то в сечении мы можем получить эллипс (окружность в частном случае), параболу или гиперболу. Проблема же трех небесных тел не имеет общего аналитического решения, которое можно свести к сочетанию простых аналитических функций и арифметических действий. Такие решения имеются только для некоторых частных случаев [**3**].

Проблему трех небесных тел в общем случае можно попытаться решить числено. А давайте сделаем это в среде отечественной физико-математической программы SMath, которую можно за пару минут скачать в базовой версии с сайта www.smath.com.

В фильме про Джеймса Бонда «Ты живешь только дважды» показано, как один космический корабль захватывает другой – хватает его манипулятором и затаскивает в свое чрево. Но небесное тело можно пленить и по-другому. Давайте рассмотрим такой случай: летит планета со спутником, а навстречу им летит другая планета без спутника. Спутник слетает с орбиты первой планеты и переходит на орбиту второй планеты. Мы рассмотрим случай, когда три небесных тела – две планеты и спутник находятся на плоскости, но ничего не мешает нам расширить задачу и численно исследовать их полет в трехмерном пространстве.

На рисунке 1 показана подготовка решения в среде SMath «плоской» задачи о трех небесных телах: задаются массы небесных тел (вектор `m`), а также их начальные координаты и скорости по двум проекциям (вектор `ICs`). Первое небесное тело имеет массу 30 единиц массы, находится в начале координат (x = 0; y = 0) и имеет следующие значения проекции скорости: по оси X минус одна единица скорости и по оси Y такое же значение Первая планета стартует влево и вниз – полная скорость имеет значение корня из двух безразмерных единиц скорости). Второе небесное тело имеет массу 2 единицы, находится в точке x = –3; y= –0.2 и имеет следующие значения проекций скорости: по оси X минус одна единица скорости и по оси Y нулевое значение (летит вправо). Третье небесное тело имеет массу в 0.5 единицы, находится в точке x = –3.1; y= –0.1 и имеет следующие значения проекций скорости: по оси X минус две единицы скорости и по оси Y нулевое значение (летит вправо, как и второе небесное тело). Это описание отображено на рисунке 1 тремя векторами с 12 элементами. Первый вектор – это численные значения расстояний и скоростей, отмеченные выше, второй вектор – это обозначения в номинации, показанной на рис. 2, а третий – это элементы вектора `x`, которые будут использоваться при создании функции `D(t, x)`, хранящей систему дифференциальных уравнений для ее решения в среде SMath (рис. 3). Элементы вектора *x* с четными номерами соответствуют ускорению небесных тел – второй производной пути по времени (первой производной скорости по времени). Мы одно дифференциальное уравнение второго порядка сводим к двум уравнениям первого порядка.

На каждое из трех небесных тел действует по две гравитационные силы, вызванные присутствием двух соседних небесных тел. Две эти силы уравновешиваются произведением массы небесного тела на его ускорение[1]. Принято, что гравитационная постоянная G равна единице. Функции с именами r_{12} и r_{13} – это расстояния от первого небесного тела до ее соседок – второго и третьего.

$$m := \begin{bmatrix} 30 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \qquad ICs := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \\ -0.2 \\ 0 \\ -3.1 \\ 2 \\ -0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ vx_1(0) \\ y_1(0) \\ vy_1(0) \\ x_2(0) \\ vx_2(0) \\ y_2(0) \\ vy_2(0) \\ x_3(0) \\ vx_3(0) \\ y_3(0) \\ vy_3(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$$

Рис. 1. Массы трех небесных тел и их состояние в начальный момент времени

$$\begin{cases} m_1 \cdot \frac{d}{dt} vx_1(t) = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}(t)^2} \cdot \frac{x_2(t) - x_1(t)}{r_{12}(t)} + G \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{13}(t)^2} \cdot \frac{x_3(t) - x_1(t)}{r_{13}(t)} \\ m_1 \cdot \frac{d}{dt} vy_1(t) = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}(t)^2} \cdot \frac{y_2(t) - y_1(t)}{r_{12}(t)} + G \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{13}(t)^2} \cdot \frac{y_3(t) - y_1(t)}{r_{13}(t)} \end{cases}$$

Рис. 2. Два дифференциальных уравнения для первого небесного тела

[1] Старый «физический» анекдот. Учитель Закона Божьего жалуется учителю физики: «Я вчера вашему любимчику двойку по Закону Божьему поставил. Спросил его, что такое Божья Сила, так он ответил мне, что это произведение Божьей Массы на Божье Ускорение!». Учитель физики: «Я ему и по физике двойку поставлю. Произведение Божьей Массы на Божье Ускорение должно дать Божественность в квадрате, а не в первой степени!».

На рисунке 3 записана система шести дифференциальных уравнений, два первых из которых показаны на рисунке 1. При перезаписи проводились такие действия. Во-первых, функции с именем r (расстояния между планетами) были вставлены в сами дифференциальные уравнения, во-вторых, произведено сокращение масс, а в-третьих, функции с аргументами заменены не нечетные элементы вектора x. Четные же аргументы этого вектора хранят значения скоростей, которые в данной задаче не фигурируют в правых частях дифференциальных уравнений.

$$D(t,x):=\begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{m_2\cdot\left(x_5-x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-x_5\right)^2+\left(x_3-x_7\right)^2}^{\,3}}+\dfrac{m_3\cdot\left(x_9-x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-x_9\right)^2+\left(x_3-x_{11}\right)^2}^{\,3}} \\ x_4 \\ \dfrac{m_2\cdot\left(x_7-x_3\right)}{\sqrt{\left(x_1-x_5\right)^2+\left(x_3-x_7\right)^2}^{\,3}}+\dfrac{m_3\cdot\left(x_{11}-x_3\right)}{\sqrt{\left(x_1-x_9\right)^2+\left(x_3-x_{11}\right)^2}^{\,3}} \\ x_6 \\ \dfrac{m_1\cdot\left(x_1-x_5\right)}{\sqrt{\left(x_5-x_1\right)^2+\left(x_7-x_3\right)^2}^{\,3}}+\dfrac{m_3\cdot\left(x_9-x_5\right)}{\sqrt{\left(x_5-x_9\right)^2+\left(x_7-x_{11}\right)^2}^{\,3}} \\ x_8 \\ \dfrac{m_1\cdot\left(x_3-x_7\right)}{\sqrt{\left(x_5-x_1\right)^2+\left(x_7-x_3\right)^2}^{\,3}}+\dfrac{m_3\cdot\left(x_{11}-x_7\right)}{\sqrt{\left(x_5-x_9\right)^2+\left(x_7-x_{11}\right)^2}^{\,3}} \\ x_{10} \\ \dfrac{m_1\cdot\left(x_1-x_9\right)}{\sqrt{\left(x_9-x_1\right)^2+\left(x_{11}-x_3\right)^2}^{\,3}}+\dfrac{m_2\cdot\left(x_5-x_9\right)}{\sqrt{\left(x_9-x_5\right)^2+\left(x_{11}-x_7\right)^2}^{\,3}} \\ x_{12} \\ \dfrac{m_1\cdot\left(x_3-x_{11}\right)}{\sqrt{\left(x_9-x_1\right)^2+\left(x_{11}-x_3\right)^2}^{\,3}}+\dfrac{m_2\cdot\left(x_7-x_{11}\right)}{\sqrt{\left(x_9-x_5\right)^2+\left(x_{11}-x_7\right)^2}^{\,3}} \end{bmatrix}$$

Рис. 3. Функция, подготовленная для численного решения системы дифференциальных уравнений в среде SMath

На рисунке 4 показаны траектории движения планет и спутника, рассчитанные по программам, описанным выше.

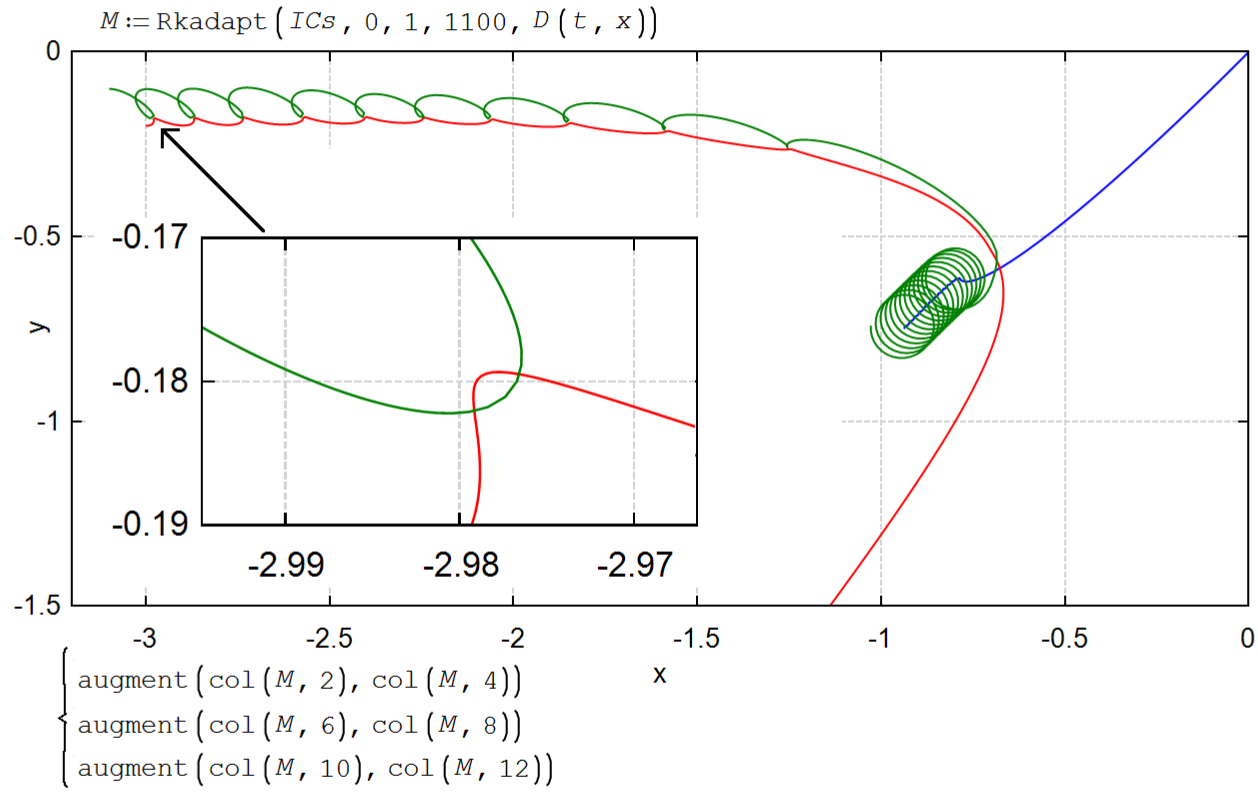

Рис. 4. Графическое отображение полета трех небесных тел – перехват спутника

Но задача о трех телах, в частности такая, какая показана на рисунке 4, не имеет, строго говоря, и численного однозначного решения. Если сменить метод интегрирования, примененный к решению этой задачи – к системе дифференциальных уравнений с начальными условиями (так называемая задача Коши), то может оказаться, что спутник после встречи с новой планетой не перейдет на новую орбиту, а останется на старой, несколько изменив форму орбит. Или же может оказаться так, что эта роковая встреча планет приводит к тому, что все три небесных тела разлетятся в разные стороны. А может быть и так, что перехвачен будет не спутник, а его планета, с которой он начинал полет. Со всем этим можно "поиграть", изучая физику, небесную механику и численные методы решения дифференциальных уравнений.

Адекватность численного решения задачи о трех небесных телах можно проверить на тех случаях, по которым аналитическое решение известно. Один такой случай показан на рисунке 5, где можно видеть, как три небесных тела с одинаковой массой летят друг за другом, выписывая знак бесконечности с периодом примерно 6,332. На рисунке 5, показан их полет за 2 единицы времени. Для моделирование такого полета необходимо в начальный момент времени планеты поместить в нужное место и придать им нужные скорости – заполнить вектор *ICs* определенными значениями. Использован метод Рунге–Кутта (`RK`) четвертого порядка с фиксированным шагом (`fixed`). В решении на рис. 4 шаг изменялся (`adapt`).

$$m := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ICs := \begin{bmatrix} 0.97000436 \\ .466203685 \\ -.24308753 \\ .43236573 \\ -0.97000436 \\ .466203685 \\ .24308753 \\ .43236573 \\ 0 \\ -.93240737 \\ 0 \\ -.86473146 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ vx_1(0) \\ y_1(0) \\ vy_1(0) \\ x_2(0) \\ vx_2(0) \\ y_2(0) \\ vy_2(0) \\ x_3(0) \\ vx_3(0) \\ y_3(0) \\ vy_3(0) \end{bmatrix}$$

$N := 1000 \qquad t_{end} := 2$

$M := \mathrm{rkfixed}\left(ICs, 0, t_{end}, N, D(t, x)\right)$

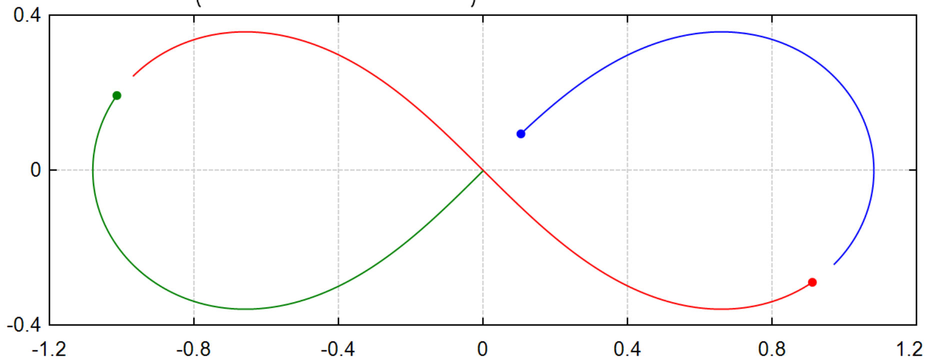

Рис. 5. Знак бесконечности из трех планет

Но если увеличивать конечное время численного решения задачи, то знак бесконечности – орбита полета планет начнет разбухать (рис. 6), а потом совсем развалится. Это является следствием приближенного решения задачи.

$N := 1000 \qquad t_{end} := 170$

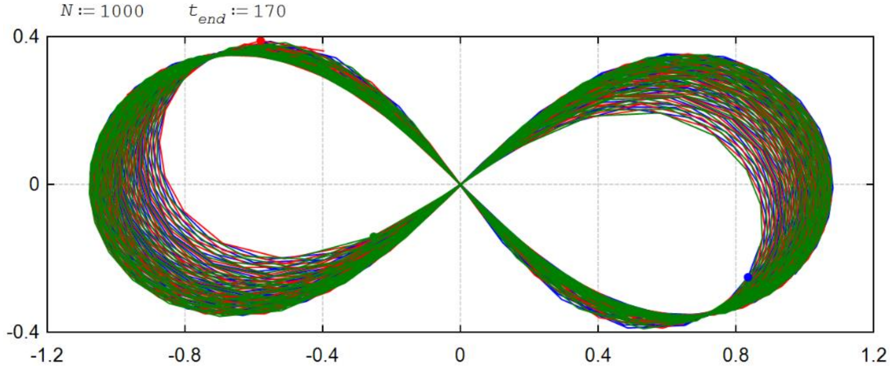

Рис. 6. Накапливание ошибки

Литература

1. *Очков В.Ф.* Комета 1812 года: проверим алгеброй гармонию // Физика в школе. № 1. 2022. С. 26-32.
2. *Очков В.Ф., Очкова Н.А.* Лев Толстой и математика. – М.: МПГУ, 2022. – 172 с. (http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Tolstoy-Math-2.pdf)
3. *Маршал К.* Задача трех тел. – Ижевск: РХД, 2004. – 640 с.

Дата поступления рукописи (Received): 01.08.2022.

Опубликовано (Published): 02.04.2023.