

Три нелинейности маятника

Или

Улыбка фазового портрета

В статье рассказано, как можно использовать современные компьютерные математические программы для инновационного ведения занятий в школе и вузе, для «свежего» решения классической задачи о колебании маятника: математического, физического, «амфорного», «дайверного», «ножного»... Предложен новый типа маятника – маятник-ныряльщик с фазовым портретом-«улыбкой». Показана возможность отказа от линеаризации при моделировании колебания «жесткого» маятника и маятника на упругой спице или пружине с учетом сопротивления среды. Изложен сценарий ведения занятия в школе и в вузе по современной образовательной технологии STEM.

Ключевые слова: маятник, составной маятник, закон Гука, нелинейный закон Гука, сила сопротивления среды, дифференциальные уравнения, Maple, Mathcad, STEM

Файлы и анимации статьи находятся на сайте: <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/One-interesting-problrm-with-shue/td-p/635149>

Разбудите любого старшеклассника или студента и спросите его, чему равен период колебания маятника, и он без запинки ответит, что это "*два пи, помноженное на корень от эль, деленное на же*". Но вряд ли кто из разбуженных скажет, откуда взялась эта формула и верна ли она по большому счету. Не вспомнит он эти нюансы, даже после того, как окончательно проснется.

Давайте поднимем этот старый вопрос и привлечем для его решения компьютер с современными математическими программами Maple и Mathcad [1].

Дивертисмент 1. Образование по технологии STEM

Данная статья – это по своей сути сценарий проведения занятия в школе или вузе по инновационной технологии STEM, когда на одном уроке с опорой на современные информационные технологии рассматриваются вопросы разных учебных дисциплин: математики, физики, химии, термодинамики, тепломассообмена, гидрогазодинамики, теоретической механики, сопротивления материалов и т. д. И даже гуманитарных дисциплин: литературы, истории, политологии и др. [2]. Для российского читателя тут более привычными будут термины "междисциплинарные связи" и "когнитивное обучение". Аббревиатура STEM образована из слов Наука (Science), Технология (Technology), Инженерное дело (Engineering) и Математика (Mathematics). Иногда сюда добавляют букву А — Art, Искусство: STEAM, а не STEM. Проблема гуманитаризации технического образования — это важный аспект в работе школы и вуза. Недаром в статье встречаются дивертисменты, которые более уместны на сцене музыкального театра и в художественной, а не в технической литературе. В статье читатель также встретит уместные и неуместные упоминания писателей и их произведений.

Слово steam по-английски это водяной пар, который в начале XIX века произвел в мире первую промышленную (теплотехническую) революцию: появились паровые машины, пароходы, паровозы... Технология обучения STEM/STEAM может способствовать развитию четвертой (цифровой) промышленной революции наших дней (Industry 4). Учитывая стиль счета, принятый в информатике и программировании, можно заметить, что была и нулевая промышленная революция (Industry 0) – тот момент нашей истории, когда появилось колесо.

В немецком языке в ходу другая аббревиатура, более точно обозначающая данную технологию обучения – MINT: M – Mathematik, I – Informatik, N – Naturwissenschaft (Естествознание) и T – Technik. Тут, как тому и положено, на первом месте стоит царица наук математика, получившая второе дыхание с развитием компьютерных символьных, численных и гибридных методов решения задач [3]. Тандем математики и компьютера – это мощная база для нового этапа развития науки и техники. Слово *mint*, кстати, по-английски – это мята. Данная технология образования призвана *освежить* застоявшийся воздух в помещениях наших учебных заведений.

Дискуссии о роли компьютеров при освоении физико-математических наук часто вспыхивают в школах и вузах. Преподаватели тут часто высказывают крайние мнения на этот счет, исключая компромиссов. Многие считают, что математику в школе и вузе нужно преподавать и осваивать сугубо «мелом на доске» и «ручкой на бумаге», и что компьютер тут может только навредить. Но, как правило, преподаватели, стоящие на такой крайней позиции, не освоили современные математические программы и имеют с ними только шапочное знакомство, а компьютер используют (да и то далеко не всегда) только для офисных целей: интернет, электронная почта, электронная книга, пишущая машинка... Девиз таких преподавателей: «Старую собаку новым фокусам не научишь!». Правда они по понятным причинам это не афишируют и обосновывают свою позицию другими, более извинительными доводами [4, 5]. Другие же преподаватели математики, освоившие компьютер до уровня своей специальности, используют его на занятиях наряду с «доской и мелом». И таких специалистов становится все больше и больше.

Второй вопрос, который присутствует в данной статье и прямо касается преподавания математики в школе и вузе таков: нужно ли уроки математики дополнять примерами из других дисциплин или нужно преподавать сугубо чистую математику без примеси прикладных наук. Тут также можно услышать крайне противоположные мнения.

Ну и третье. В настоящее время процесс решения инженерных задач и задач математической физики сделал резкий крен от аналитических к численным методам. Но преподавание математики в школе и в вузе по-прежнему базируется, в основном, на «аналитике», а не «цифре». Это также является темой острых дискуссий.

Недавно в СМИ промелькнула сообщение о том, что в старших классах Финляндии отменили предметы. Теперь урок в школе заточен не на разбор и заучивание положений какой-либо учебной дисциплины, а на решение конкретной задачи, на исследование конкретного объекта с привлечением знаний из всех учебных дисциплин, изучаемых в школе. Если говорить о данной статье, то этот объект всем известный маятник.

Опыт ведения занятий по технологии STEM будет расширяться по мере роста числа преподавателей нужной квалификации и соответствующих разработанных и апробированных задач.

Конец дивертисмента 1

Итак, мы сажаем в компьютерном классе (а лучше в компьютерном физическом кабинете) школьников или студентов и целый день разбираем задачу о колебании маятника. Предварить такое занятие можно демонстрацией качания реального маятника, благо они есть в физических кабинетах школ. Если потолок в классе достаточно высок, то маятник можно подвесить к нему и работать с так называемым маятником Фуко, плоскость качания которого поворачивается синхронно с вращением Земли вокруг своей оси. Так можно соорудить своеобразные часы, которые, во-первых, будут оригинально отмеривать перемены в занятиях, и, во-вторых, позволят дополнить занятие сведениями из астрономии.

1. Символьное и численное решение

На рисунке 1 размещена схема задачи о маятнике, отталкиваясь от которой формируется дифференциальное уравнение, показанное на рис. 2 в пункте 1.

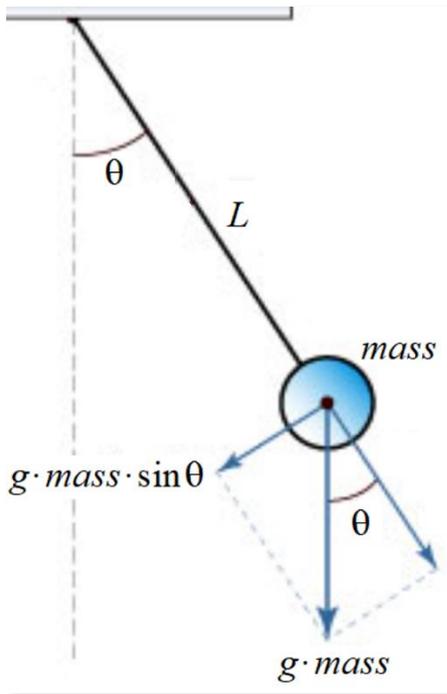


Рис. 1. Схема задачи о колебании математического маятника

$$ode := mass \cdot diff(\theta(t), t, t) \cdot L = -g \cdot mass \cdot \sin(\theta(t))$$

$$ode := mass \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) L = -g \cdot mass \sin(\theta(t)) \quad (1)$$

$$ics := \theta(0) = a0, D(\theta)(0) = 0$$

$$ics := \theta(0) = a0, D(\theta)(0) = 0 \quad (2)$$

$$dsolve(\{ics, ode\})$$

$$\theta(t) = RootOf \left(\int_{-Z}^{a0} \frac{L}{\sqrt{-2L \cos(a0)g + 2L \cos(-a)g}} d_a + t \right), \quad (3)$$

$$\theta(t) = RootOf \left(\int_{a0}^{-Z} \frac{L}{\sqrt{-2L \cos(a0)g + 2L \cos(-a)g}} d_a + t \right)$$

$$ode := mass \cdot \theta''(t) \cdot L = -g \cdot mass \cdot \theta(t)$$

$$ode := mass D^{(2)}(\theta)(t) L = -g \cdot mass \theta(t) \quad (4)$$

$$dsolve(\{ics, ode\})$$

$$\theta(t) = a0 \cos \left(\frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{L}} \right) \quad (5)$$

Рис. 2. Аналитическое решение задачи о математическом маятнике в среде Maple

Уравнение 1 на рисунке 2 – это математическая запись второго закона Ньютона: масса маятника (материальной точки), умноженная на его ускорение (произведение второй производной углового перемещения θ на длину маятника L), равна силе, приложенной к маятнику по вектору

ускорения (тангенциальная составляющая). Эта сила равна весу маятника¹ $g \cdot mass$, умноженному на **синус** угла θ отклонения маятника от вертикали – на вертикальную проекцию силы тяжести маятника. Синус здесь выделен жирным шрифтом неслучайно: решение этого простого дифференциального уравнения с начальными условиями (задачи Коши – см. п. 2 на рисунке 2) вылилось в довольно сложное выражение (п. 3), с которым нужно еще думать, что делать дальше. Это так называемый синус Якоби, где присутствует и корень (*RootOf*) выражения, и интеграл, но никак не просматривается вышеотмеченная формула периода колебания маятника. Да и самих решений два. Но если из исходного уравнения убрать синус (а это допустимо делать только при малых углах отклонения маятника от вертикали – см. уравнение 4 на рис. 2), то решением будет всем известное «школьное» уравнение колебания маятника (п. 5 на рис. 2) с косинусом и с периодом, который спросонья без запинки озвучил старшеклассник.

Дивертисмент 2. Гравитационный поезд

Есть старая полуфантастическая идея соорудить на Земле длинный прямой туннель, выкачать из него воздух и пустить по нему поезд на магнитной подвеске, обеспечивающей минимум трения. Первую половину пути такой поезд будет разгоняться под действием силы тяжести, а потом эта же сила начнет его тормозить. Поезд доедет до конца туннеля, остановится и покатится назад. Такой поезд – это еще один маятник с периодом колебания примерно 42 минуты, длительность которого не зависит от глубины залегания туннеля. Эту идею в настоящее время пытается реализовать известный предприниматель Илон Маск (поезд HyperLoop).

Есть еще более фантастическая идея – проделать такой туннель через центр Земли, соорудив так называемый гравитационный лифт. О нем мы упомянем, когда будем рассматривать задачу о парашютисте.

Так вот, дифференциальное уравнение гравитационного поезда и гравитационного лифта не будет содержать синуса [6, 7].

Конец дивертисмента 2

Можно, конечно, извернуться, попытаться построить график синуса Якоби по его аналитическому выражению (см. п. 3 на рис. 2) и посмотреть, как будет колебаться маятник и при больших углах отклонения от вертикали. Но можно поступить иначе, по-современному – решить уравнение 1 на рис. 2 не *аналитически*, а *численно*. Раньше, это делать было весьма затруднительно или даже совсем невозможно по причине труднодоступности компьютеров и их низкой скорости работы. Сейчас же такая операция прикладной математики стала рутинной и ее можно провести чуть ли не смартфоне, загрузив на него соответствующую математическую программу.

¹ Давайте разбудим нашего старшеклассника/студента не в основном тексте, а в сноске и спросим его, что такое вес и что такое сила тяжести. Ожидаемый ответ таков: «Вес – это сила, с которой тело давит на какую-то опору, а сила тяжести – это сила, которая "тянет" объект по направлению к Земле. Невесомость на то она и невесомость: в корабле на земной орбите вес космонавта равен нулю, но сила тяжести остается и уравновешивается не реакцией опоры, а центробежной силой. А еще есть центростремительная сила, которая в отличие от центробежной силы приложена к телу, а не к связи...». Но тут мы этого словоохотливого школьника остановим и разрешим ему поспать дальше, простив ему некоторые неточности в объяснениях. И это понятно – в учебниках можно встретить разные толкования этих терминов.

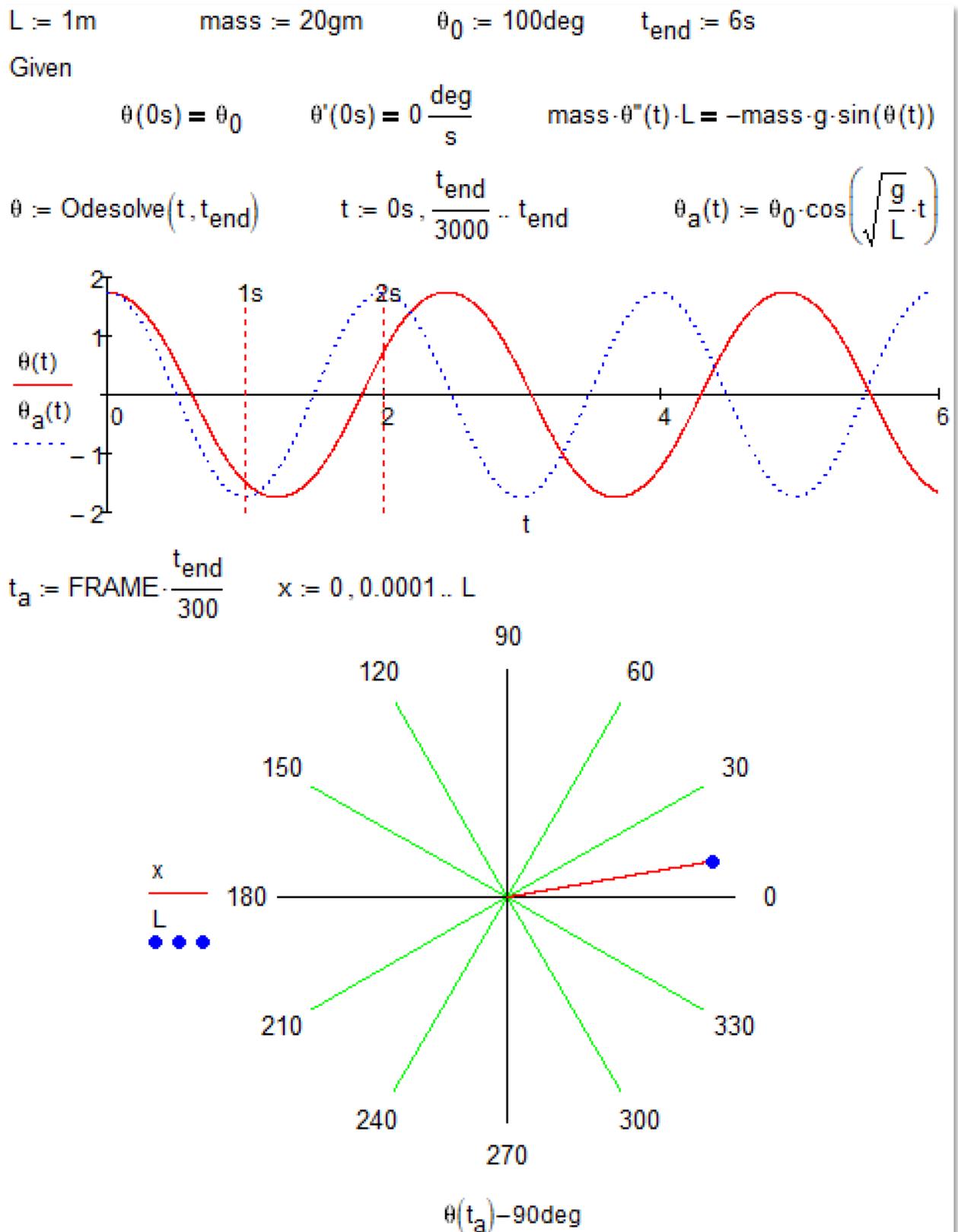


Рис. 3. Численное решение задачи о математическом маятнике в среде Mathcad

В решении на рисунке 3 как, впрочем, и в решении на рисунке 2 масса маятника (переменная *mass*) не сокращена. Это сделано намерено для того, чтобы в уравнении ясно просматривалась «физика» задачи – математическое выражение для второго закона Ньютона. Математические пакеты Maple и Mathcad сами все «сократят» без нашей помощи.

На первом графике на рисунке 2 сплошной красной линией отображено колебание метрового маятника при начальном отклонении маятника от вертикали θ_0 на 100° и при нулевой начальной скорости. Пунктирная синяя линия – это решение уравнения «без синуса» – ответ нашего полусонного старшеклассника. На синусоиде («косинусоиде») данного усеченного решения отмечены две точки: одна секунда (полупериод колебания маятника) и две секунды (полный период). Это сделано для того, чтобы лишний раз показать откуда взялся и «пошел по миру» метр как единица длины, базовая во многих системах исчислений, в СИ, например.

Дивертисмент 3. О метре из Википедии

Если еще раз разбудить старшеклассника и спросить его, что такое метр, то он скорее всего ответит, что это какая-то там доля какого-то там меридиана Земли или что-то такое, связанное со светом (длина пути, проходимого светом в вакууме за заданный интервал времени). Но почти никто не вспомнит, что метр пошел от метрового маятника напольных часов, имеющего период колебания в две секунды – см. рис. 4. Каждый взмах маятника таких часов через систему шестеренок перемещает стрелки часов на нужный угол. Внизу маятника на резьбовой шпильке есть пара гаек, вращая которые можно менять длину маятника и заставлять часы идти точно. Остановится маятнику не дает заводная пружина часов или гиря, которую время от времени нужно поднимать вверх.



Рис. 4. Напольные часы с метровым маятником и с селфи одного из авторов статьи

В Европе со времён распада империи Карла Великого не существовало общих стандартных мер длины: они могли быть стандартизированы в пределах одной юрисдикции (которая зачастую имела размеры одного торгового городка), но единых мер не было, и каждый регион мог иметь свои собственные. Причиной этого служило в какой-то мере то, что меры длины использовались в налогообложении (налог, например, мог измеряться в определённой длине полотна), а поскольку каждый местный правитель вводил свои налоги, то для соответствующей местности законами устанавливались свои единицы измерений.

С развитием науки в XVII веке стали раздаваться призывы к введению «универсальной меры» (*universal measure*, как назвал её английский философ и лингвист Джон Уилкинс в своём эссе 1668 года) или «католического метра» (*metro cattolico*) итальянского учёного и изобретателя Тито Ливико Бураттини из его работы *Misura Universale* 1675 года, меры, которая бы основывалась на каком-либо естественном явлении, а не на постановлении властьержащей персоны, и которая была бы десятичной, что заменило бы множество разнообразных систем счисления, например, распространённую двенадцатеричную, одновременно существовавших в то время.

Идея Уилкинса заключалась в том, чтобы выбрать для единицы длины длину маятника с полупериодом колебаний равным 1 с. Подобные маятники были незадолго до этого продемонстрированы Христианом Гюйгенсом (рис. 4), и их длина была весьма близка к длине

современного метра (так же, как к единицам длины, использовавшимся в те времена, например, ярду). Однако, вскоре было обнаружено, что длина, измеренная таким способом, различается в зависимости от места измерений. Французский астроном Жан Рише во время экспедиции в Южную Америку (1671—1673) обнаружил увеличение периода колебаний секундного маятника по сравнению с тем, который наблюдался в Париже. Выверенный в Париже маятник в процессе наблюдений им был сокращён на 1,25 французской линии (~ 2,81 мм), дабы избежать отставания во времени на 2 минуты в день. Это было первое прямое доказательство уменьшения силы тяжести по мере приближения к экватору, и это дало разницу в 0,3 % длины между Кайенной (во французской Гвиане) и Парижем.

Вплоть до французской революции 1789 года в вопросе установления «универсальной меры» не было никакого прогресса. Франция была озабочена вопросом распространения единиц измерений длины, необходимость реформы в этой области поддерживали самые различные политические силы. Талейран возродил идею о секундном маятнике и предложил её Учредительному собранию в 1790 году, с тем уточнением, что эталон длины будет измерен на широте 45° N (примерно между Бордо и Греноблем). Таким образом, метр получал следующее определение: метр — это длина маятника с полупериодом колебаний на широте 45°, равным 1 с.

Первоначально за основу было принято это определение (8 мая 1790, Французское Национальное собрание). Но несмотря на поддержку собрания, а также поддержку Великобритании и новообразованных Соединённых Штатов, предложение Талейрана так и не было осуществлено. (подробнее <https://ru.wikipedia.org/wiki/Метр>).

Конец дивертисмента 3

Внизу рисунка 3 показана заготовка анимации колебания маятника с использованием не традиционного декартового, а более редкого полярного графика Mathcad, который наиболее подходит для отображения этого процесса: нить маятника, точнее, спица (жесткая невесомая связь) — это функция-радиус, а угол наклона — это аргумент, меняющийся от нуля до 2π . Саму же анимацию можно увидеть на сайте статьи.

Дивертисмент 4. О синусе и полярном графике

Спросите-ка того же старшеклассника — сонного или уже проснувшегося, видел ли он когда-нибудь во сне или наяву график синуса весь целиком? Скорее всего он вам ответит, что этого сделать невозможно и что можно увидеть только несколько «волн» синусоиды или другой периодической тригонометрической функции. И здесь старшеклассника можно понять, но нельзя с ним согласиться.

Дело в том, что синусоиду обычно изображают в декартовой системе координат, в которой она (синусоида), естественно, никогда не уместится целиком — см., например, рис. 3. Помещается синусоида целиком только на полярном графике, о котором часто забывают — см. рис. 5. И не просто на полярном, а на таком, где есть отрицательные значения радиуса. В среде Mathcad, например, это стало возможным делать относительно недавно. В среде Maple, где радиус на полярном графике может иметь только положительные значения, синус без дополнительных приемов будет построен в виде круга, а не в виде... «попки²». Правильно построить этот график в среде Maple можно, если к функции-радиусу прибавить единицу. Примечание: на полярном графике в среде Mathcad на рис. 5 показана трассировка графика: пользователь водит курсором мышки по графику синуса и видит в специальном окошке значения аргумента (угловые градусы) и самой функции. Среда же Maple оперирует радианами.

² Так старшеклассники отвечают мысленно, а самые озорные и вслух, когда их неосторожно спросишь, на что похож «полярный синус».

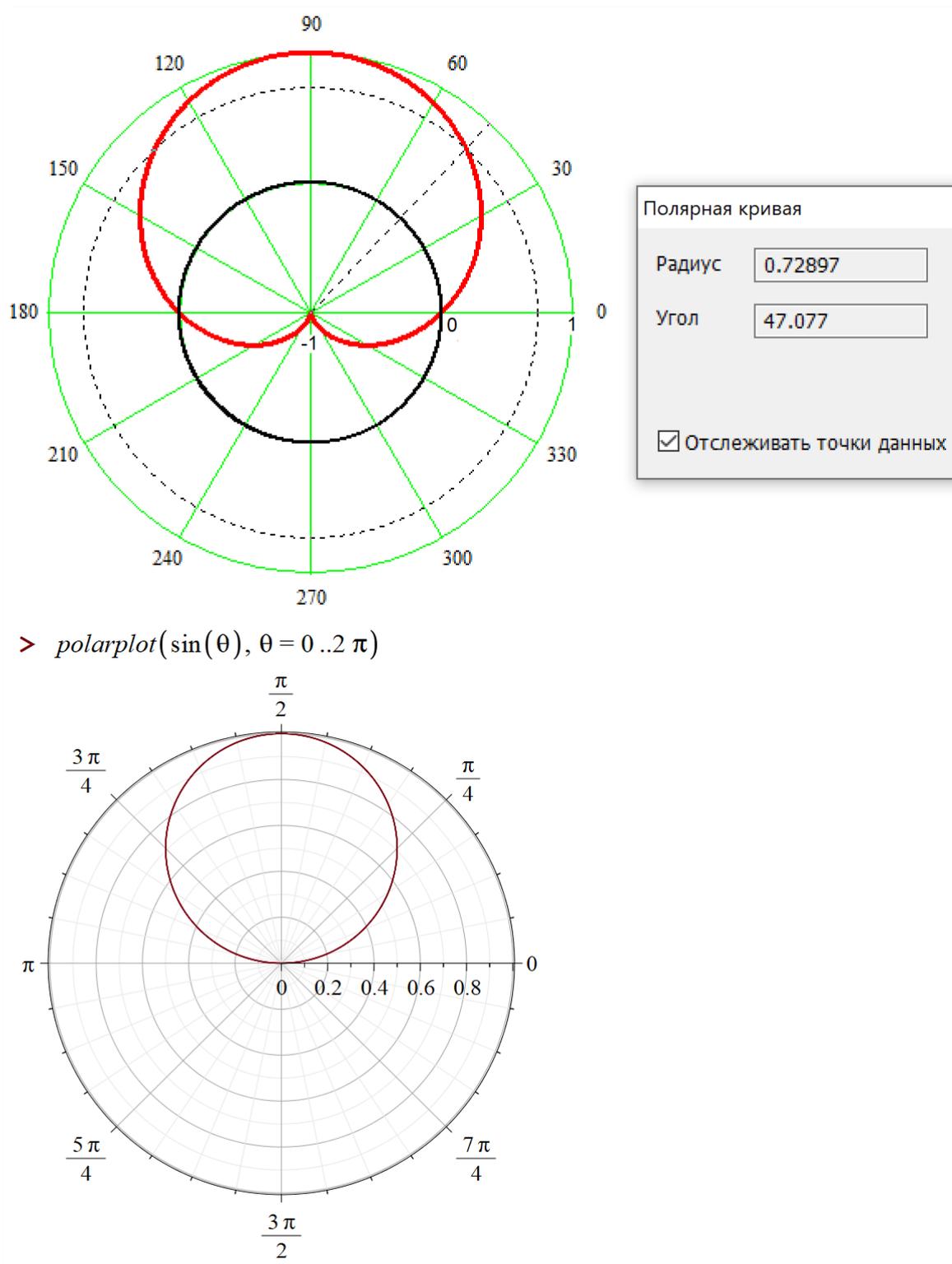


Рис. 5. Синус на полярном графике: Mathcad верху, Maple внизу

Конец дивертисмента 4

2. Начальные и краевые условия

Выше была решена (символьно и численно) так называемая *задача Коши* – задача с начальными условиями, когда в начальной точке ($t = 0$ s) были заданы начальное положение маятника (начальный угол его отклонения от вертикали) и его скорость (нулевая в нашем случае). Но есть и так называемая *краевая задача*. Применительно к задаче о колебании маятника она

формируется так: даны значения отклонения маятника от вертикали в двух разных моментах времени, найти функцию, описывающую колебание маятника. На рисунках ниже показано, как справились с этой задачей пакет Maple (рис. 6) и пакет Mathcad (рис. 7).

$$ode := mass \cdot diff(\theta(t), t, t) \cdot L = -g \cdot mass \cdot \theta(t);$$

$$ode := mass \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) L = -g \cdot mass \cdot \theta(t) \quad (1)$$

$$ics := \theta(0) = \theta_0, \theta(t1) = \theta_0$$

$$ics := \theta(0) = \theta_0, \theta(t1) = \theta_0 \quad (2)$$

$$dsolve(\{ics, ode\})$$

$$\theta(t) = -\frac{\theta_0 \left(\cos\left(\frac{\sqrt{g} t1}{\sqrt{L}}\right) - 1 \right) \sin\left(\frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{L}}\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{g} t1}{\sqrt{L}}\right)} + \theta_0 \cos\left(\frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{L}}\right) \quad (3)$$

Рис. 6. Аналитическое решение краевой задачи в среде Maple

Пакет Maple смог выдать аналитического выражения только для «безсинусного» дифференциального уравнения колебания маятника. Если же в уравнение вернуть синус, то ответ не будет выдан. Пакет же Mathcad поступает иначе – несколько... коварно.

$$L := 1m \quad mass := 20gm \quad \theta_0 := 135deg \quad t_{end} := 2s$$

Given

$$\theta(0s) = \theta_0 \quad mass \cdot \theta''(t) \cdot L = -mass \cdot g \cdot \sin(\theta(t)) \quad \theta(t_{end}) = \theta_0$$

$$\theta := \text{Odesolve}(t, t_{end}) \quad \theta(t_{end}) = -66.312 \text{ deg}$$

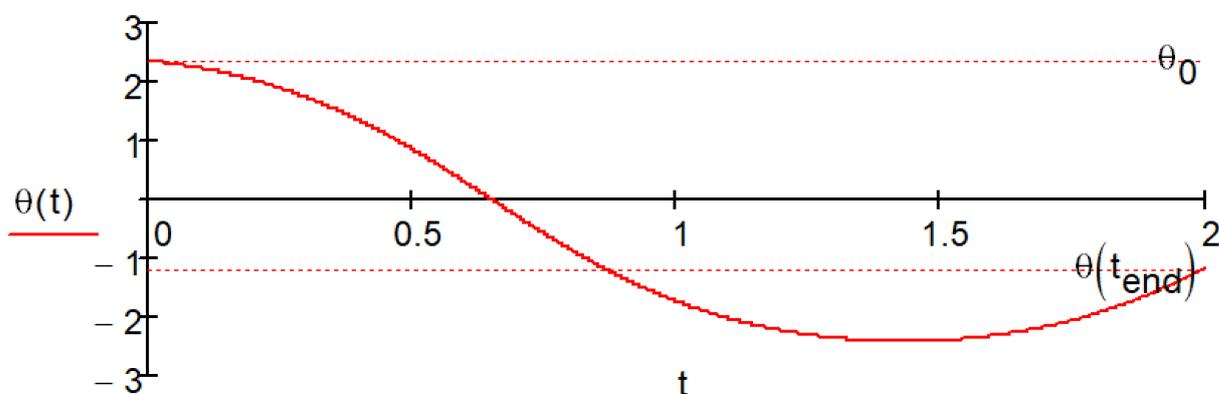


Рис. 7. Численное «решение» краевой задачи в среде Mathcad

Пакет Mathcad численно решил краевую задачу для «синусного» дифференциального уравнения колебания маятника, но решил ее неправильно – на рисунке 7 должен был быть

прорисован полный период колебания маятника, а не его часть. А неверный ответ, как известно, намного хуже (коварнее), чем просто никакой ответ. Решение краевой задачи с помощью функции **Odesolve** в среде Mathcad – это недокументированный прием, и мы должны были бы по хорошему счету, получить сообщение об ошибке, а не неверный ответ. Документированный прием – это решение краевой задачи методом стрельбы, когда задается начальный угол подъема ствола пушки (начальная скорость маятника) и ведется наблюдение «куда пушка попадет». После этого ведется «корректировка огня».

Математический маятник — это груз (материальная точка, имеющая массу, но не имеющая размера), подвешенный на абсолютно невесомой, нерастяжимой (и несжимаемой) нити. Численные методы решения дифференциальных уравнений, встроенные в математические пакеты, позволяют снимать и ограничения, чего не скажешь о символьных методах. Начнем с «нерастяжимости».

3. Эластичность подвеса маятника

Если еще раз разбудить старшекласника и спросить его, по какому закону растягивается (сжимается) резинка (пружина), то он опять же без запинки ответит: «По закону Гука!». Но если погуглить по интернету, то можно лишний раз убедиться, что очень мало материалов при деформации ведут себя так, как прописано этим законом даже при незначительных сжатиях или растяжениях [8]. Это вторая «незначительность» маятника, если вспомнить о «незначительности» отклонения маятника от вертикали, которую мы рассмотрели выше.

На рисунке 8 показано начало расчета колебания маятника, подвешенного на невесомом стержне, сжатие/растяжение которого подчиняется не закону Гука (линейному закону), а более сложной нелинейной зависимости, описываемой функцией L .

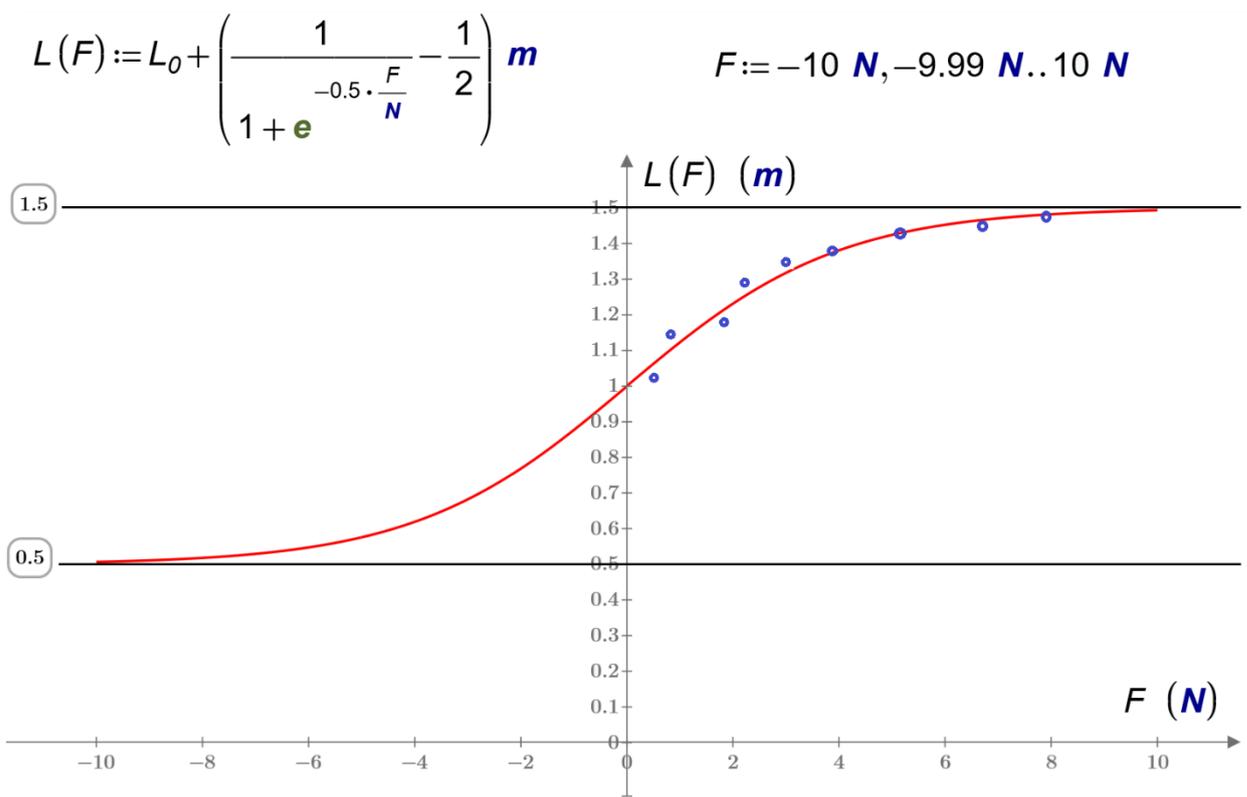


Рис. 8. Графическое отображение нелинейного закона Гука

На рисунке 8 прописана так называемая *логистическая функция*, которая достаточно близко к реальности описывает свойство эластичной подвески маятника: она под действием силы F сначала растягивается/сжимается более-менее линейно, а затем эластичность исчерпывается и связь становится жесткой.

Дивертисмент 5. О логистической функции
(https://ru.wikipedia.org/wiki/Логистическое_уравнение)

Логистическое уравнение, также известное как уравнение Ферхюльста (по имени впервые сформулировавшего его бельгийского математика), изначально появилось при изучении изменений численности населения. Было составлено соответствующее дифференциальное уравнение, решение которого и дало данную функцию.

Почему Ферхюльст назвал уравнение логистическим, остается загадкой. Тем не менее, эта S-образная кривая широко используется для отображения развития многих процессов. Так, например, качественно выглядит количество выпущенных в мире паровозов: они появились в начале XIX века (первая промышленная революция – см. выше), потом их количество стало возрастать, а затем их вытеснили тепловозы и электровозы. Наша замена линейного закона Гука на нелинейную модель – это еще один пример использования этой кривой.

На рисунке 8 можно видеть синие точки, которыми облеплена красная логистическая кривая. Представим себе, что это графическое отображение такого эксперимента, который еще Гук проводил. Берется резинка, на которую подвешивают груз с известным весом. Длину резинки измеряют. Потом вес груза увеличивают и делают новый замер длины резинки. Так делают до тех пор, пока резинка перестанет растягиваться или просто порвется. Затем точки на графике обрабатывают методом наименьших квадратов [9]. В среде Mathcad, кстати, есть для этого соответствующая встроенная функция с именем *lgsfit*, возвращающая вектор, содержащий три коэффициента логистической кривой вида $a / (1 + b \cdot e^{-c \cdot x})$, наилучшим образом аппроксимирующей данные в векторах VX и VY с использованием VG как вектора начального приближения.

Конец дивертисмента 5

На рисунке 9 показано численное решение уже не одного дифференциального уравнения, а трех: двух дифференциальных и одного алгебраического. Функция **Odesolve** возвращает в данном случае уже не одну, а три функции пользователя с именами X и Y (координаты маятника на эластичной подвеске в декартовой системе координат) и F – сила натяжения/сжатия подвески маятника.

Авторы сделали попытку решить задачу о маятнике в полярной системе координат так, как это было сделано для маятника на жесткой подвеске (рис. 2 и 3). Но численное решение такой системы было очень нестабильно, что связано с ее... жесткостью, с существенными отличиями в значениях тангенциального и радиального перемещений. Данная вычислительная особенность обсуждалась на форуме пользователей Mathcad <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Hook-Pendulum-in-Polar/td-p/635585>. Жесткость системы дифференциальных уравнений каким-то образом связана с жесткостью подвески маятника [10], что требует особых подходов при численном решении систем дифференциальных уравнений.

Solve

$$mass \cdot x''(t) = -F(t) \cdot \frac{x(t)}{L(F(t))}$$

$$mass \cdot y''(t) = -F(t) \cdot \frac{y(t)}{L(F(t))} - mass \cdot g$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = L(F(t))^2$$

$$x(0 \text{ s}) = L_0 \cdot \sin(\theta_0) \quad y(0 \text{ s}) = -L_0 \cdot \cos(\theta_0)$$

$$x'(0 \text{ s}) = 0 \frac{m}{s} \quad y'(0 \text{ s}) = 0 \frac{m}{s}$$

$$F(0 \text{ s}) = -mass \cdot g \cdot \cos(\theta_0)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ F \end{bmatrix} := \text{Odesolve} \left(\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ F(t) \end{bmatrix}, t_{end} \right)$$

Рис. 9. Численное решение задачи о маятнике на эластичной подвеске

На рисунке 10 показаны два кадра анимации колебания маятника на эластичной подвеске. Саму анимацию можно увидеть на сайте статьи. Пунктирными линиями отмечены: круг с радиусом L_0 и области минимального и максимального сжатия/растяжения, в соответствии с законом, изображенным на рис. 8. Этот закон, к примеру, учитывается при проектировании подвески (рессор, пружин и амортизаторов) автомобилей, мотоциклов, велосипедов и требует не только учета статики, но и динамики. По ТВ и в интернете можно увидеть эффектные кадры, как мотоциклист летит в воздухе и мягко приземляется на землю. Подвеска такого мотоцикла должна быть спроектирована так, чтобы, с одной стороны, удар о землю был как можно мягче, а с другой стороны, мотоцикл не подпрыгнул бы снова после приземления. Это очень интересная и сложная инженерная задача.

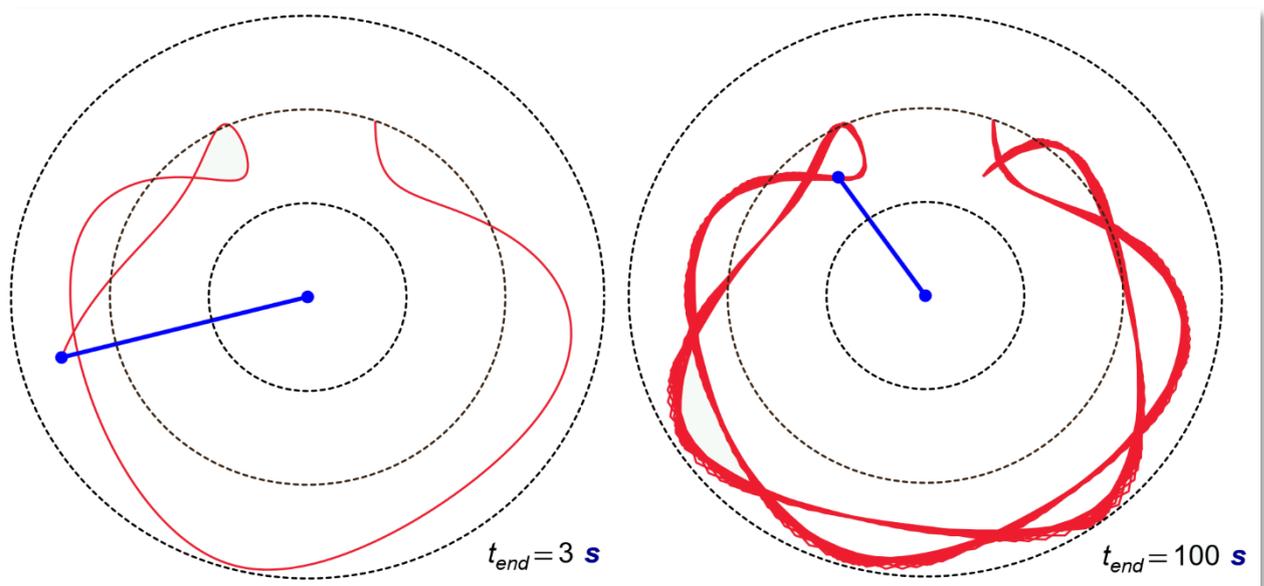


Рис. 10. Два кадра анимации маятника на эластичной подвеске

Дивертисмент 6. Нет в жизни счастья!

Компьютерное аналитическое решение дифференциальных уравнений очень часто дает громоздкий и непонятный для непосвященных ответ (пример на рис. 2), либо вообще не дает никакого ответа. Численное же решение такой задачи часто приводит к накоплению ошибки, что сильно искажает решение, которое всегда нужно уметь проверять, что мы и сделаем ниже. Это же восклицание о счастье в жизни касается и сравнения двух версий Mathcad. «Старый добрый» Mathcad 15 имеет средства анимации, но не может работать с единицами измерения при использовании функции **Odesolve**. «Новичок» же – Mathcad Prime – это единственный в мире математический пакет, который может решать дифференциальные уравнения с единицами измерения, но, увы, лишен инструментов создания анимации. Рисунки 3 и 7 – это фактически некие «обманки»: исходные данные в задаче о маятнике имеют единицы длины, массы, силы. Но это некие псевдоединицы измерения, своеобразные комментарии, помогающие понимать суть задачи, но не участвующие в расчетах. Дело в том, что в самом начале расчета введены операторы $m := 1, kg := 1, s := 1$ и т.д. Вот эти-то единицы в смысле единицы измерения и вставляются в расчет в качестве единиц в смысле единичных констант. Сам же инструмент работы с размерными величинами был отключен. Сентенция, вынесенная в заголовок этого дивертисмента, относится и к тому факту, что в этой статье отображаются результаты работы двух, а не одного математического пакета.

Конец дивертисмента 6

На рисунке 11 показана проверка решения задачи о маятнике на растяжке: строятся графики изменения во времени трех видов энергии и их суммы (ΣE), которая, как и ожидалось, остается постоянной. Вернее, почти постоянной – см. незначительные всплески³ на горизонтальной прямой суммы энергий, показанной на отдельном графике внизу рисунка 11. А энергии это такие: кинетическая энергия маятника (функция KE), его потенциальная энергия (PE) и потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины (ES).

³ Они связаны с накоплением ошибки численного метода.

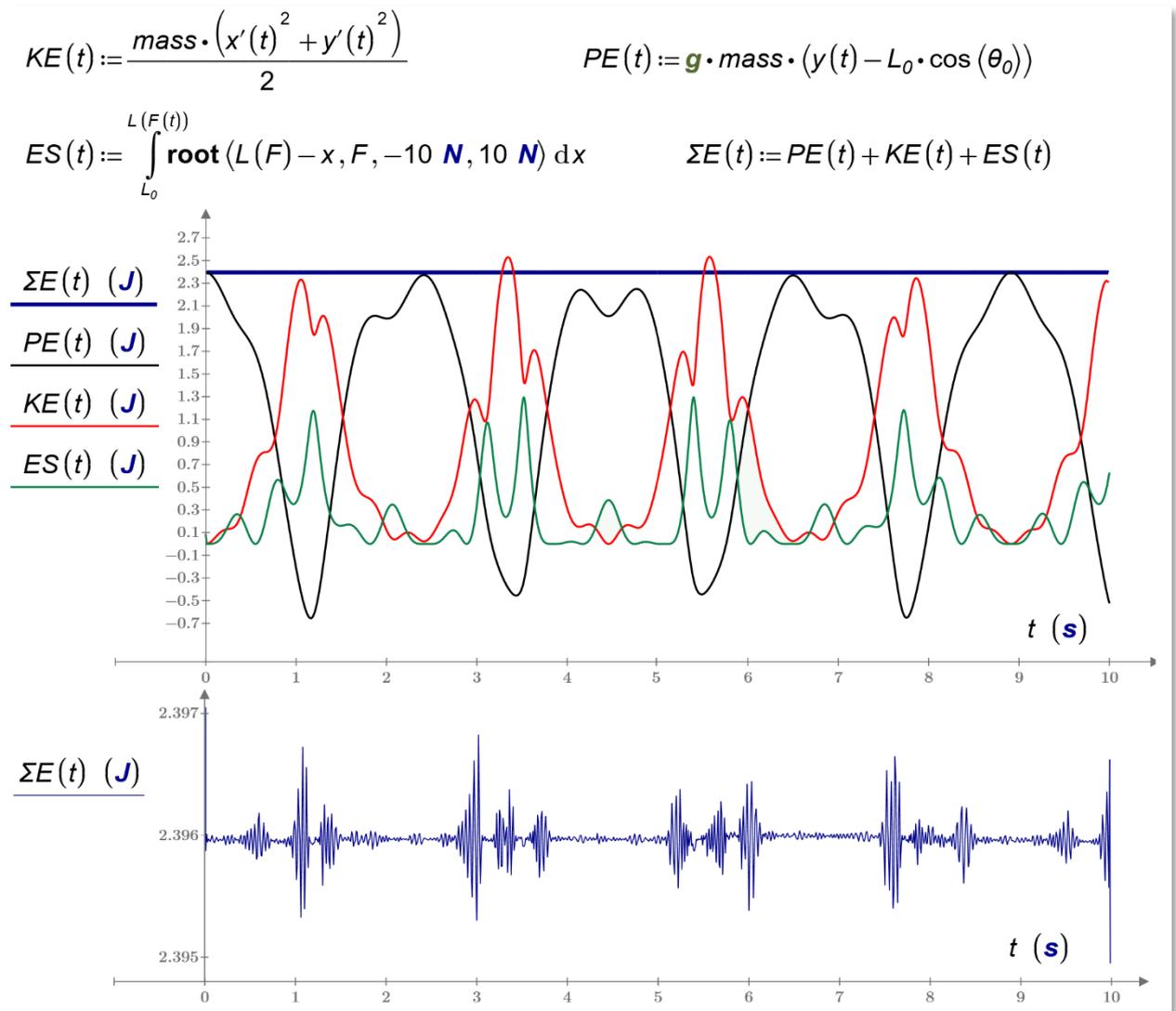


Рис. 11. Изменение трех видов энергии качающегося маятника на эластичной подвеске

Дивертисмент 7. Потенциальная энергия пружины

Мы уже замучили нашего старшеклассника/студента вопросами-побудками. Но давайте все же разбудим его еще разок и спросим, чему равна потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины. Ответ заранее известен: «Половина квадрата отклонения пружины от исходной точки, деленная на коэффициент эластичности». Все помнят эту формулу, но опять же никто знает, откуда она взялась и что она по большому счету опять же неверна. Вернее, верна только для частного, линейного случая.

Конец дивертисмента 7

Да, формула потенциальной энергии растянутой пружины «с квадратом и половинкой» вытекает из линейного закона Гука. Но об этом многие забывают, как забывают и о том, что формула периода колебания маятника, с которой мы начали нашу статью, также является частным «линейным» случаем. Нам же с нашим нелинейным законом подвески маятника придется от готовой формулы отказаться и идти к истокам: вспомнить, что энергия («несделанная работа») – это сила, умноженная на расстояние⁴. Отсюда и возникает определенный интеграл силы по расстоянию в формуле для потенциальной энергии пружины – см. рисунок 11. Под интегралом находится не

⁴ Юмористическая переделка старой поговорки: «Работа не волк, ... а произведение силы на расстояние!».

сама функция, а ее цифровой двойник, если так можно выразиться. Встроенная в Mathcad функции **root** генерирует функцию, обратную функции $L(F)$. Это делается методом половинного деления на интервале от -10 до 10 ньютонов. Если же в данный интеграл вписать линейную функцию Гука и взять его (не Гука, конечно, а интеграл), то и получится формула с квадратом значения растяжения пружины, деленным на два⁵ и деленным на коэффициент эластичности. Можно, конечно, не использовать численную функцию **root**, а найти аналитически функцию, обратную функции $L(F)$, далее опять же аналитически взять определенный интеграл и получить формулу первообразной для расчета потенциальной энергии пружины/резинки $ES(t)$. Но лучше оставить все так, как показано на рис. 11, где хорошо видна физика задачи. В готовых формулах она, как уже было подчеркнuto выше, теряется.

На рисунке 12 показаны кривые, связывающие силу, действующую на спицу маятника, с его длиной. Толстая красная кривая (параметрический график с параметром t) получена в результате решения системы дифференциальных уравнений (рис. 9), а тонкая черная – это обычный (не параметрический) график логистической функции с аргументом f . Разброс красной кривой можно расширять, приближать ее к черной кривой, если, например, увеличивать массу маятника или задать ему начальную ненулевую скорость. Но функция **Odesolve** при этом начнет «взбрыкивать» – выдавать сообщение об ошибке. Так что численной математикой тоже не стоит особо обольщаться. Нужно уметь использовать и ее и символьную математику, помня об их ограничениях и недостатках (см. дивертисмент 6). А в отдельных случаях приходится отказываться от встроенных в математические пакеты инструментов решения дифференциальных уравнений и создавать собственную расчетную модель.

⁵ Человек идет по улице, смотрит в смартфон (увлеченно читает эту статью, например) и врезается в столб. Другой человек пытается стрельнуть из рогатки, растягивает резинку, но она обрывается и бьет его по лбу. Эти две неприятные ситуации можно сгладить юмором и сказать: «Хорошо, что пополам!».

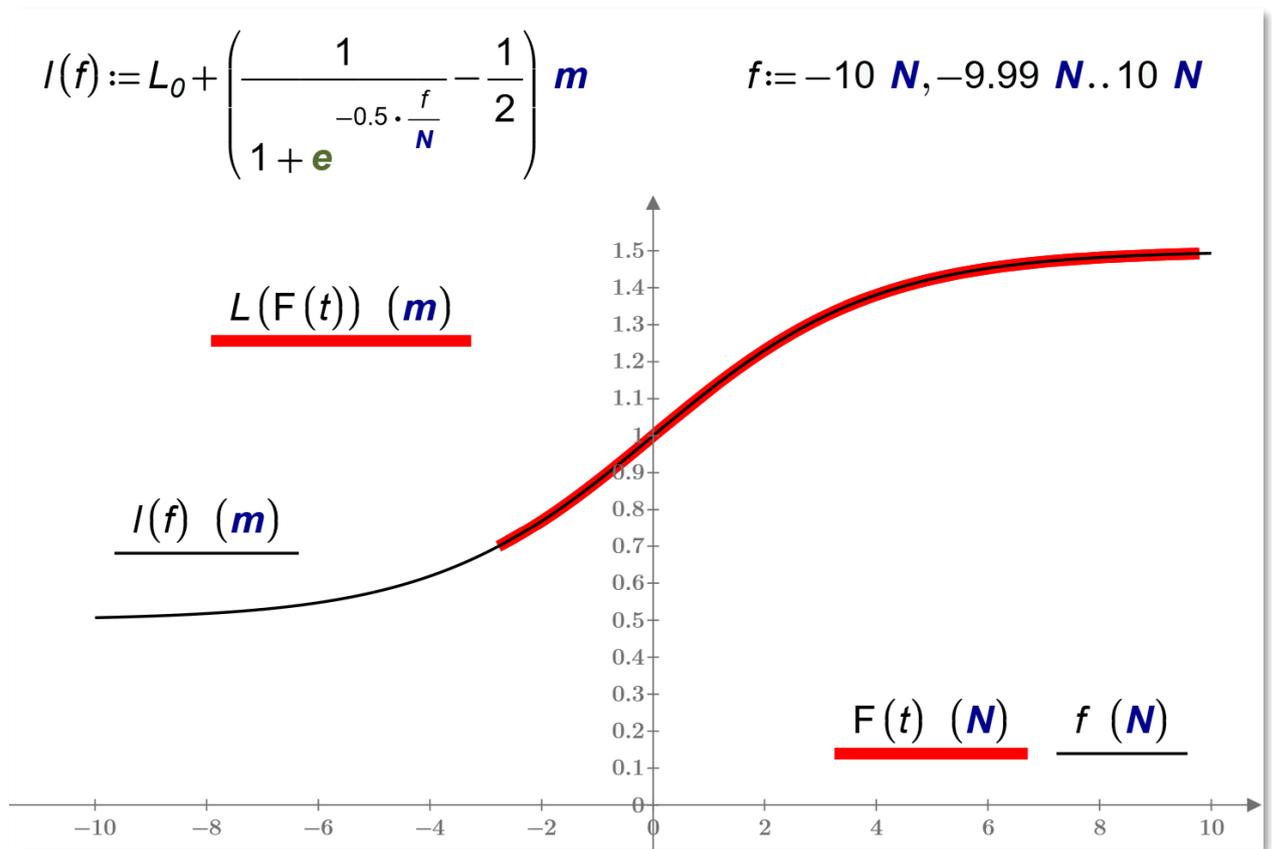


Рис. 12. Нелинейность эластичности нити маятника

В задаче о маятнике на нежесткой подвеске можно поиграть исходными данными и получить довольно занятные траектории его движения. Так на рисунке 13 можно видеть силуэт... амфоры.

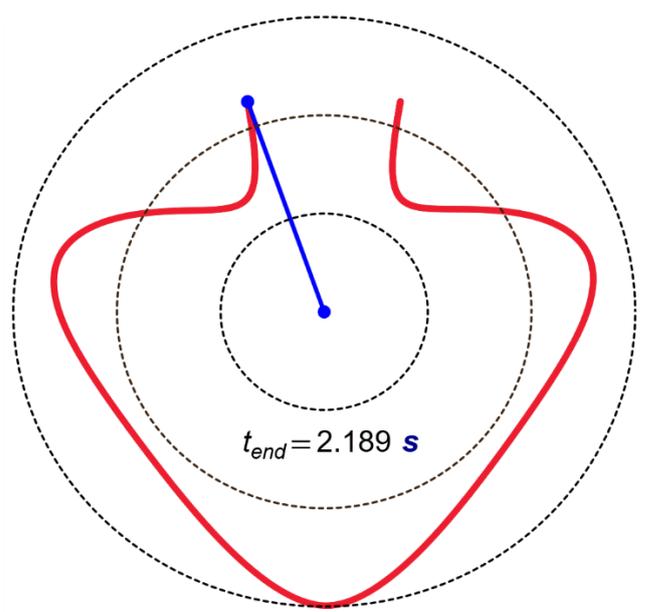


Рис. 13. Маятник-амфора

Если увеличивать интервал времени решения задачи t_{end} , то ответ будет становиться явно неверным. Горизонтальная линия, отображающая сумму трех энергий, на графике на рис. 11

перестанет быть горизонтальной прямой линией, а траектория движения маятника на анимации (см. рис. 10 и сайт статьи) начинает дергаться... Будет создаваться такое впечатление, что ребенок закрашивает контур яблока в книжке-раскраске: сначала он делает это более-менее аккуратно, а потом он устает и рисует... каляку-маляку. Взгляни, читатель на процесс «рисования яблока» на сайте статьи. Это яблоко отсылает нас к легенде о том, как Исаак Ньютон открыл закон всемирного тяготения, без которого (без тяготения) маятник не будет колебаться. В этом плане яблоко – это удобный маятник: подвесил его на ветви яблони, оттянул в сторону и... открывай новые траектории, сравнивай их с теорией. А нить такого яблочного маятника (вернее, спица) может быть эластичной!

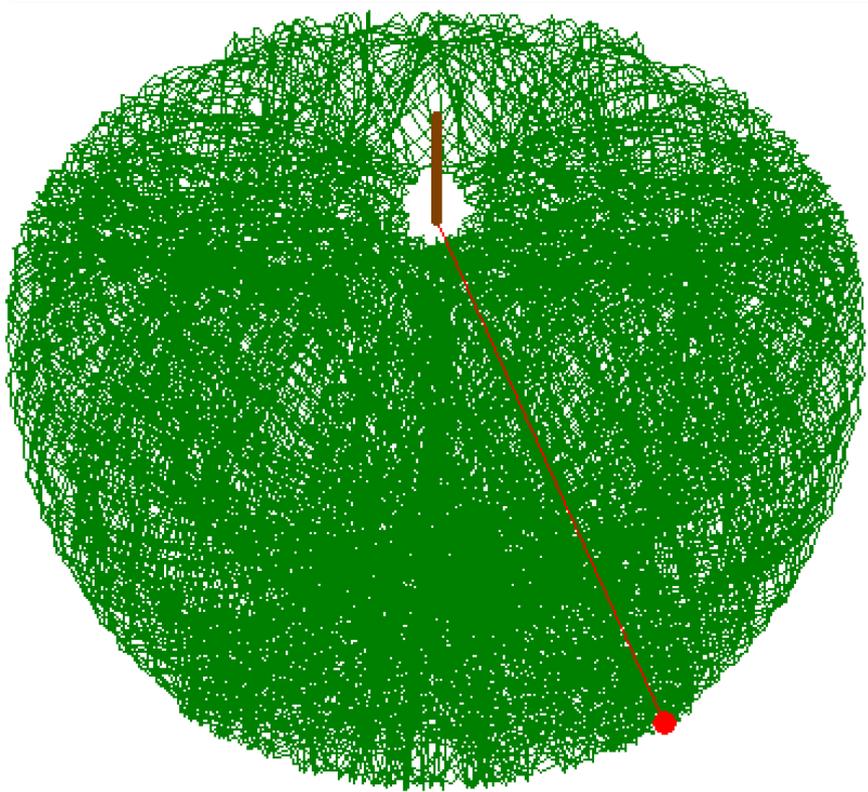


Рис. 14. Маятник-яблоко

4. Мячик на резинке

Давайте подвесим на резинку наше яблоко (см. рис. 14), оттянем его в сторону от неподвижной точки подвеса и отпустим в свободный полет. Есть такая детская игрушка – мячик на резинке⁶ (см. рис. 15). Из этой игрушки, кстати, совсем недавно сделали боксерский тренажер: резинку крепят на лбу боксера и пытаются «нокаутировать» привязанный к резинке мячик.

⁶ В детстве первых двух авторов статьи во дворы домов заезжали телеги, из которых доносились призывы «Старье берем! Старье берем!». Дети приносили старье тряпки, за которые старьевщики давали разные безделушки – тот же мячик на резинке, например. Вернее, не мячик, а бумажный комочек, набитый опилками. Верхом же мечтаний было получить от старьевщика отлитый из олова пистолет-пугач с пробками-патронами. Но за него нужно было чуть-ли не все тряпье из дому вынести и отдать старьевщику. Герой фильма «Судьба барабанщика» по повести Аркадия Гайдара (<https://www.youtube.com/watch?v=EybJV61DmW4>) пытался сбить такому старьевщику меховую горжетку своей мачехи. Среди этих старьевщиков было много татар, которые кричали «Хурда мурда!».



Рис. 15. Детская игрушка «Мячик на резинке»

На рисунке 16 показан протокол решения задачи о мячике на резинке, который перемещается только в вертикальном направлении (1D модель). Резинка растягивается по линейному закону Гука. На мячик попеременно действуют то одна, то две силы: сила тяжести действует всегда, а сила натяжения резинки действует только в те моменты, когда длина резинки оказывается больше ее длины в ненапряженном состоянии (L_0). Эти силы по-ньютоновски «уравновешиваются» произведением массы мячика на его ускорение. Протокол решения на рис. 16 дополнен графиком, связывающим высоту полета мячика с его скоростью. Это так называемый фазовый портрет, о котором мы подробнее поговорим ниже.

$$\begin{aligned}
 mass &:= 20 \text{ gm} & y_0 &:= 1.5 \text{ m} & v_0 &:= 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 k &:= 1 \frac{\text{m}}{\text{N}} & L_0 &:= 1 \text{ m} & F(L) &:= \frac{L - L_0}{k} & t_{end} &:= 2 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Решить

$$mass \cdot v'(t) = \text{if}(y(t) > L_0, -F(y(t)), \text{if}(y(t) < -L_0, F(-y(t)), 0 \text{ N})) - g \cdot mass$$

$$v(t) = y'(t) \quad y(0 \text{ s}) = y_0 \quad v(0 \text{ s}) = v_0$$

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} := \text{odesolve} \left(\begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, t_{end} \right)$$

$$t := 0 \text{ s}, \frac{t_{end}}{1000} .. t_{end}$$

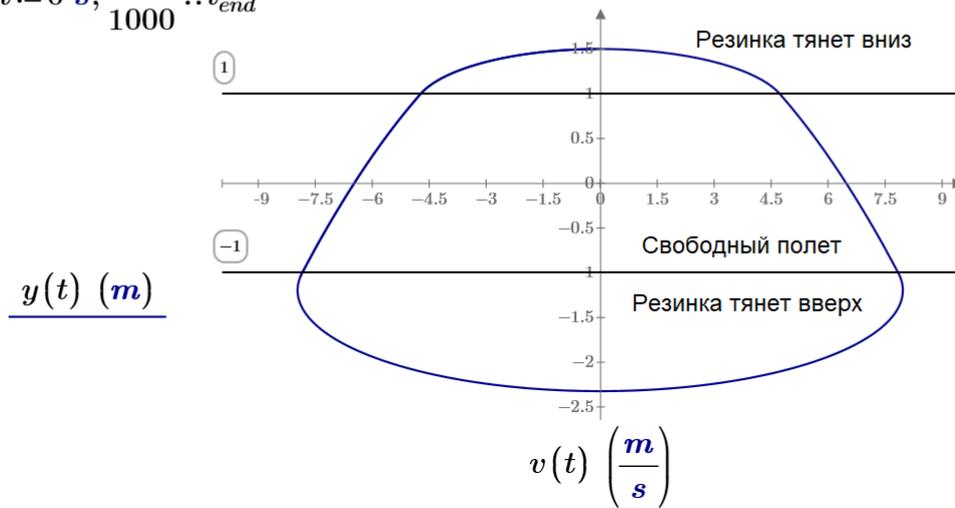


Рис. 16. Решение одномерной задачи о мячике на резинке

Одномерную модель мячика на резинке реализовать на практике практически невозможно: мячик должен пролетать через точку, куда привязан один из концов резинки. Но задачу, показанную на рис. 16, несложно усложнить и перейти от линии к плоскости (2D модель). Для этого необходимо работать не с расстояниями и скоростями, а проекциями расстояний и скоростей в горизонтальном и вертикальном направлениях – см. рис. 17.

Решить

$$L(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad L(0 \text{ s}) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad x(0 \text{ s}) = x_0 \quad y(0 \text{ s}) = y_0$$

$$mass \cdot v_x'(t) = \text{if} \left(L(t) > L_0, -F(L(t)) \cdot \frac{x(t)}{L(t)}, \text{if} \left(L(t) < -L_0, F(-L(t)) \cdot \frac{x(t)}{L(t)}, 0 \text{ N} \right) \right)$$

$$mass \cdot v_y'(t) = \left\| \begin{array}{l} \text{if } L(t) > L_0 \\ \left\| \begin{array}{l} -F(L(t)) \cdot \frac{y(t)}{L(t)} \\ \text{else if } L(t) < -L_0 \\ \left\| \begin{array}{l} F(-L(t)) \cdot \frac{y(t)}{L(t)} \\ \text{else} \\ \left\| \begin{array}{l} 0 \text{ N} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right\| -g \cdot mass$$

$$v_x(0 \text{ s}) = 0 \frac{m}{s} \quad v_x(t) = x'(t)$$

$$v_y(0 \text{ s}) = 0 \frac{m}{s} \quad v_y(t) = y'(t)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \\ L \end{bmatrix} := \text{Odesolve} \left(\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \\ L(t) \end{bmatrix}, t_{end} \right)$$

Рис. 17. Блок Решить двумерной задачи о мячике на резинке

Для формирования математической записи второго закона Ньютона в горизонтальной проекции два раза используется встроенная функция *if* с тремя аргументами (она же задействована и в решении, показанном на рис. 16). В вертикальном же направлении задействованы операторы программирования *if*, *else if* и *else*. Это сделано для демонстрации разнообразия инструментов Mathcad. Дополнительно в расчет введена функция $L(t)$.

На рисунке 18 показаны четыре кадра анимации полета мячика на резинке уже не в 1D, а в 2D пространстве.

Сам Mathcad-документ можно скачать с сайта статьи. Там же можно увидеть соответствующую анимацию. На первом и втором кадрах анимации (рис. 18) можно видеть натянутую резинку. На третьем кадре анимации она подрисована от руки⁷. А на самом деле мы ее не показываем, когда мячик отстоит от точки крепления резинки на расстоянии меньшем чем L_0 . На свободном месте первого кадра графически отображен линейный закон Гука.

⁷ Моделирование колебания резинки без груза – это отдельная довольно сложная задача.

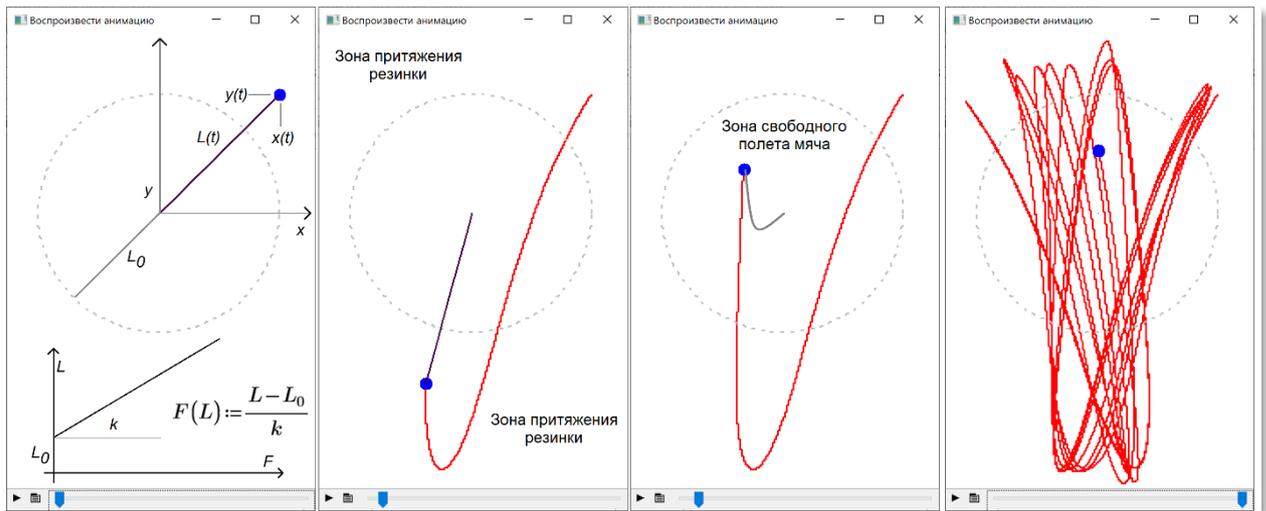


Рис. 18. Кадры анимации движения мячика на резинке (двумерная задача)

5. Сопротивление среды – ныряльщик

Математические модели маятников, описанные выше, имели существенное ограничение – в них не учитывалось *сопротивление среды*. Поэтому-то наши маятники и мячики будут раскачиваться вечно. Давайте уберем это ограничение и рассмотрим еще одну модель маятника. Но не совсем обычного: прыжок в воду с вышки.

Ныряльщик (шар с радиусом $r := 30 \text{ cm}$ и с плотностью 950 kg/m^3 – см. рисунок 19) становится на вышку высотой $h_0 = 10 \text{ m}$, подпрыгивает вверх со скоростью $v_0 := 3 \text{ m/s}$ и плюхается в воду. Как будет меняться высота полета и скорость ныряльщика во времени?

На рисунке 19 зафиксирован ввод исходных данных задачи о ныряльщике и необходимые для расчета функции пользователя.

$$\begin{aligned}
r &:= 30 \text{ cm} & \rho_{man} &:= 950 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} & V &:= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 0.113 \text{ m}^3 \\
mass &:= V \cdot \rho_{man} = 107.442 \text{ kg} & S &:= \pi \cdot r^2 = 0.283 \text{ m}^2 \\
h_0 &:= 10 \text{ m} & v_0 &:= 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
\rho(h) &:= \text{if} \left(h > 0, 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \\
\eta(h) &:= \text{if} \left(h > 0, 1.8 \cdot 10^{-5}, 1.2 \cdot 10^{-3} \right) \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{m}^2} \\
k(h, v) &:= \left\| \left\| \begin{aligned} &Re \leftarrow \frac{\rho(h) \cdot |v| \cdot 2 \cdot r}{\eta(h)} \\ &\text{if} \left(Re < 4, \frac{24}{Re}, \text{if} \left(Re < 576, \frac{12}{\sqrt{Re}}, 0.5 \right) \right) \end{aligned} \right. \right\|
\end{aligned}$$

Рис. 19. Исходные данные для расчета прыжка в воду с вышки

По радиусу шара-ныряльщика и его плотности рассчитываются:

- V – объем ныряльщика;
- $mass$ – его масса (он у нас немного толстоват);
- S – площадь максимального поперечного сечения (площадь большого круга);

Далее в расчет вводятся три функции пользователя:

- $\rho(h)$ – плотность среды, в какой движется ныряльщик; это функция-ступенька, возвращающая два значения – плотность воздуха или плотность воды;
- $\eta(h)$ – вязкость воздуха и воды также ступенчато зависит от высоты полета ныряльщика;
- $k(h, v)$ – коэффициент трения при движении шара в вязкой среде – в воздухе или в воде.

Несколько замечаний по данным функциям.

1. Если плотность воды можно принять за константу, то плотность воздуха нет: она уменьшается по высоте. Это мы учтем ниже при решении задачи о прыжке парашютиста.
2. Читателя может удивить единица вязкости воды и воздуха, записанная в функции $k(h, v)$. Авторов же удивляет узаконенная в СИ единица вязкости $\text{Pa} \cdot \text{s}$. Дело в том, что при всем уважении к Блезу Паскалю нужно отметить, что этот французский ученый не

имел никакого отношения к вязкости. С вязкостью работал Исаак Ньютон. Поэтому-то и нужно в единице вязкости использовать не единицу давления (Pa – паскаль), а единицу силы (N – ньютон). Такая замена, не только справедлива в историческом плане, но и возвращает физику задачи: если пластину площадью 1 м^2 перемещать со скоростью 1 м/с с силой 1 Н вдоль такой же пластины, отстоящей от первой на расстоянии 1 м , то вязкость среды между пластинами (ньютоновской жидкости!) будет равна вот той самой единице измерения вязкости, которая прописана на рис. 19 и которую нужно ни с того ни с сего заменять на $Pa \cdot s$. А Блез Паскаль, повторяем, к этому физическому явлению (внутреннее трение) никакого отношения не имел⁸. Справедливости ради следует отметить, ученые и инженеры чаще всего тут работают с *пуазами* – с единицами вязкости, названными в честь Ж. Л. М. Пуазёйля, французского врача и физика, исследовавшего, в частности, течение крови по артериям.

3. Коэффициент трения гладкого шара зависит от безразмерного критерия теории подобия – от числа Рейнольдса (Re) [11]. В формуле для Re в учебниках и справочниках фигурирует, как правило, не просто вязкость (см. выше), а так называемая кинематическая вязкость, представляющая собой нормальную (ньютоновскую динамическую) вязкость, деленную на плотность⁹. Но это не главное отличие формулы для числа Re , записанной в справочниках и на рис. 19. На рисунке 19 от скорости берется модуль и вот почему. Авторы, создавая расчет полета ныряльщика долго не могли понять в чем ошибка, пока не сообразили, что тут должна стоять не просто скорость, а модуль скорости. Дело в том, что скорость в отличии от массы, например, это векторная, а не скалярная величина. Если скорость имеет отрицательное значение, то значение числа Re будет тоже отрицательным. Следовательно значение коэффициента трения тут тоже будет отрицательным, т. к. оно вычисляется по следующим формулам. При $Re < 4$ (ламинарное обтекание шара воздухом или водой) $24/Re$, а при $4 \leq Re < 567$ (переходный режим) $12/\sqrt{Re}$. При $Re \geq 576$ – коэффициент трения не зависит от числа Re и равен 0.5 (турбулентный режим течения). А вот в дифференциальном уравнении ныряльщика

⁸ В связи с этим вспоминается старый анекдот.

— Кому поставлен этот памятник?

— Льву Толстому!

— Это тот, кто «Муму» написал?

— Нет, «Муму» Тургенев написал.

— А почему же памятник Толстому!?

⁹ Эта вязкость называется кинематической потому, что в единице ее измерения присутствуют только метры и секунды, но нет ни килограммов, ни ньютонов. Но, повторяем, в этой «вязкости» нет никакого физического смысла. Она была введена в практику для облегчения ручных расчетов и только. Сейчас расчеты, как правило, ведутся на компьютере и нет необходимости использовать фантомную кинематическую вязкость. Что мы и сделали в нашем расчете. Хотя можно постараться и выдумать еще и некую «статическую вязкость». Бог любит троицу и в механике: статика, кинематика и динамика! Кинематическую вязкость часто измеряют в *стоксах* – единицах, названных в честь Г. Стокса, английского математика, механика и физика-теоретика, внесшего значительный вклад в развитие гидрогазодинамики.

наоборот вектор скорости терять нельзя. Иначе не будет приниматься во внимание тот факт, что сила трения всегда действует против скорости. Это учтено вводом в расчет функции-ступеньки *sign*. И еще одно важное замечание. Наш шар-маятник не просто обтекается воздухом или водой. Колебательные движения имеют то следствие, что шар-маятник может попадать в воздушный или водяной след от своего собственного движения. Это еще более усложняет гидрогазодинамику нашей задачи.

На рисунке 20 показано численное решение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями¹⁰.

Решить	$h(0) = h_0 \quad v(0) = v_0 \quad v(t) = h'(t)$
Ограничения	$mass \cdot v'(t) = g \cdot V \cdot \rho(h(t)) - \frac{1}{2} \cdot k(h(t), v(t)) \cdot \rho(h(t)) \cdot S \cdot v(t)^2 \cdot sign(v(t)) - g \cdot mass$
Решатель	$\begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} := \text{Odesolve} \left(\begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, t_{end}, 10000 \right)$

Рис. 20. Численное решение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями

На ныряльщика действуют три силы:

- архимедова сила (вес вытесненной среды – воздуха или воды); на воздухе ею можно пренебречь, а в воде нельзя – иначе наш ныряльщик просто пойдет ко дну; и ныряльщика жалко и нас жалко – мы не получим ожидаемого маятника;

- сила сопротивления среды (сила трения), которая пропорциональна (с коэффициентом *k*) плотности среды, площади поперечного сечения «ныряльщика» и квадрату его скорости; мы здесь уже в третий раз отказываемся от линейности и вводим в расчет не коэффициент (константу) *k*, а функцию *k(h, v)*, где идентификаторы *h* и *v* также не являются константами, а являются функциями от времени полета ныряльщика. Следует только удивляться, как пакет Mathcad не запутался в этих вложенных функциях¹¹

- сила тяжести ныряльщика (его вес).

Архимедова сила действует вверх, сила тяжести – вниз, а сила сопротивления среды – то вверх, то вниз: в зависимости, как отмечено выше, от направления движения ныряльщика. Возведение скорости во вторую степень лишает ее знака, который восстанавливается с помощью

¹⁰ В задачах, отображенных на рисунках 2 и 3, мы решали одно уравнение второго порядка, которое, как известно, можно свести к решению двух уравнений первого порядка.

¹¹ Следует вообще удивляться, как компьютер не путается в наших вычислительных проблемах. И тут очень помогает инструмент работы с физическими величинами в среде Mathcad Prime. В пакете Maple, кстати, тоже есть единицы измерения, но их нельзя использовать при решении дифференциальных уравнений. Эта же недоработка омрачает работу и в среде Mathcad 15 (см. выше).

функции *sign* (знак). Другой способ восстановления знака у скорости – это работа не с квадратом скорости, а с произведением скорости на ее модуль (абсолютное значение).

Начнем анализ процесса ныряния в воду со случая, когда не учитываются сила трения о воздух и в воду. На рисунке 21 показан уже нами упомянутый фазовый портрет¹², связывающий скорость и высоту полета прыгуна в воду. Для этого достаточно обнулить функцию k – записать вместо сложного выражения с числом Рейнольдса (см. низ рисунка 19) оператор $k(h, v) := 0$. Решением такой упрощенной задачи будет замкнутая кривая, показанная на рис. 21.

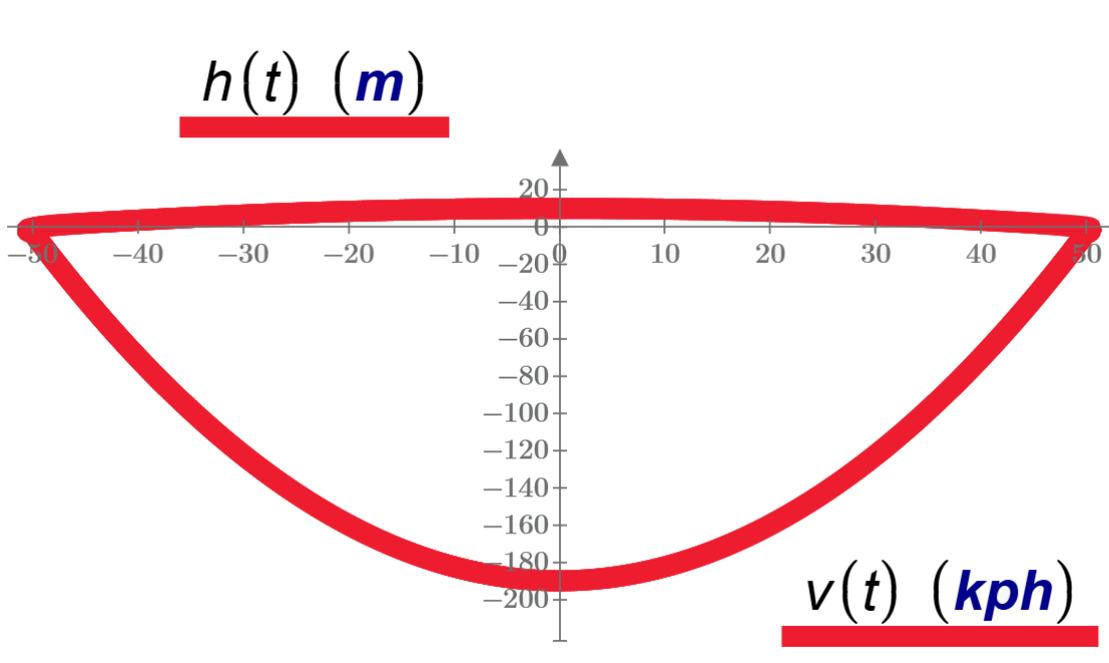


Рис. 21. Фазовый портрет маятника-ныряльщик без учета силы трения

Мы получили своеобразный маятник: ныряльщик летит в воду, увеличивая свою скорость до примерно 50 kph, затем опускается на глубину примерно 200 m, теряя скорость, далее вода выталкивает его с ускорением на поверхность и выбрасывает обратно на исходную позицию для нового цикла ныряния и выскакивания из воды. Если мы в задаче о маятнике на эластичной резинке дадим нулевое начальное отклонение от вертикали, то мы получим примерно такие же колебания. В качественном, а не в количественном смысле.

На рисунке 22 показан фазовый портрет «Улыбка ныряльщика». Она получается, если учитывать сопротивление воздуха и воды по формуле, показанной на рис. 19 (работа не с нулем, а с функцией $k(h, v)$).

¹² Авторы долго искали в доступных ресурсах толкование термина «фазовый портрет» и пришли к выводу, что это просто параметрический график зависимости двух параметров исследуемого объекта. Вот хорошее простое толкование этого термина: фазовый портрет — это то, как величины, описывающие состояние системы, зависят друг от друга. В случае механического движения (наш случай с маятником) это координата и скорость, в электричестве это заряд и ток, в известной популяционной задаче это количество хищников и жертв и т. д. (<https://habr.com/ru/post/268507/>).

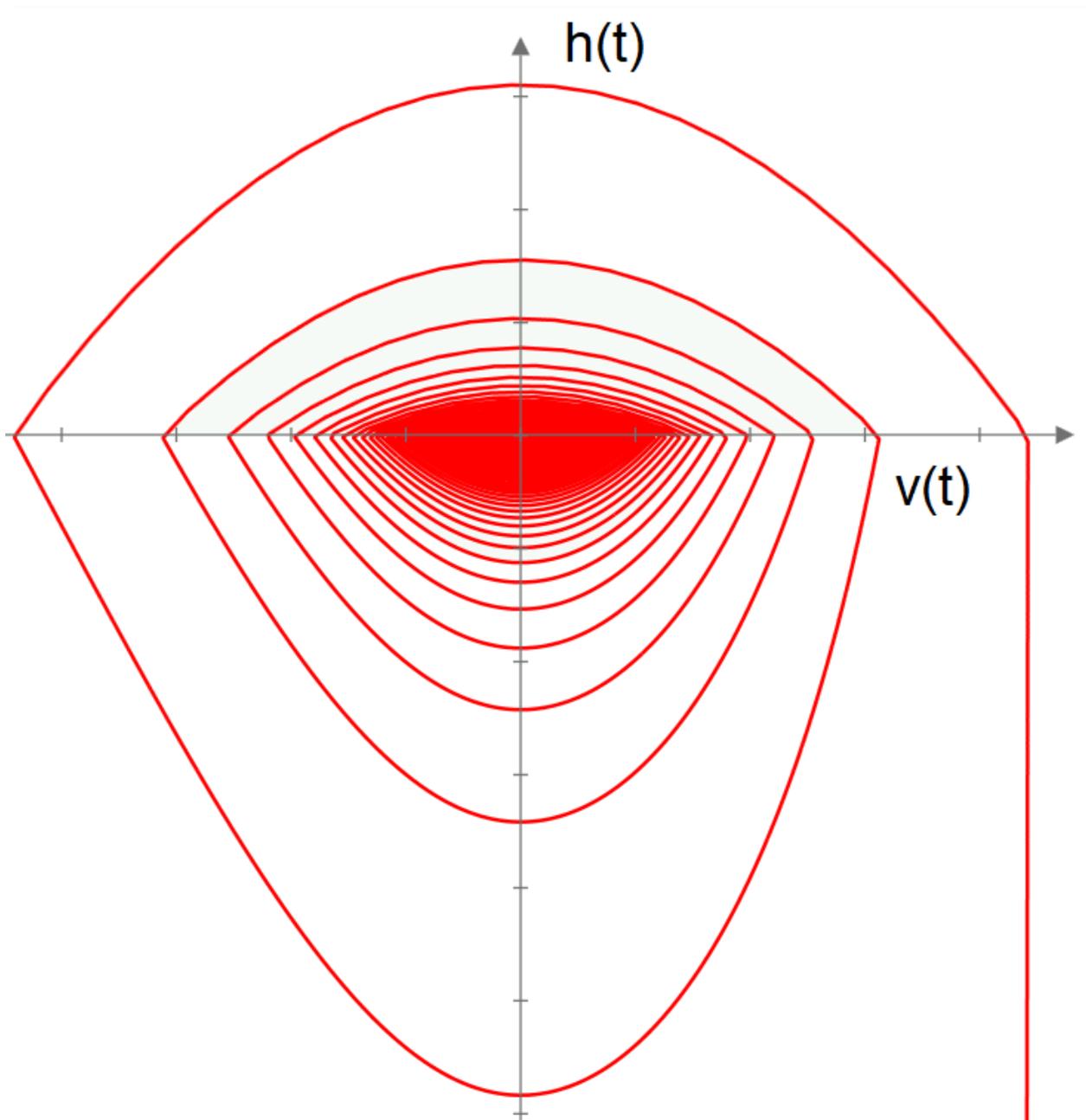


Рис. 22. Аттрактор «Улыбка ныряльщика»

На рисунке 22 показана «улыбка» фазового портрета ныряльщика: стартовая потенциальная энергия растрачивается (рассеивается) на нагрев воздуха, воды и самого шара-ныряльщика. Если просуммировать все три вида энергий ныряльщика (потенциальную, кинетическую и архимедову¹³) и отобразить ее на графике, подобном тому, какой показан на рис. 11, то мы уже не получим горизонтальную линию суммы энергий: эта линия у нас будет опускаться.

¹³ Еще один вид энергии, связанный с опусканием тела в воду и с силой (Архимедовой силой), какое действуют на тело.

6. Сопротивление среды – парашютист

Задачу о ныряльщике (a diver, по-английски) легко переделать в задачу о парашютисте¹⁴ (skydiver – воздушный ныряльщик). Рисунок 24 – это фактически повторение рисунка 19, но с такими изменениями:

1. Радиус ныряльщика теперь не константа, а опять же функция-ступенька: парашютист – это шар с радиусом 30 cm (старт прыжка на высоте 30 km), а потом с радиусом 2.5 m (парашют раскрылся на высоте 3 km). Здесь при желании можно отказаться от функции-ступеньки и перейти к функции-пандусу, когда радиус парашютисты меняется не скачком, а плавно (линейно или нелинейно плавно). Вот еще один каверзный вопрос в цепочке линейных/нелинейных вопросов этой статьи.
2. Плотность воздуха падает по высоте согласно барометрической формуле, которая, кстати говоря, выводится тоже из решения дифференциального уравнения. В формуле две константы: известное уже нам ускорение свободного падения¹⁵ g и универсальная газовая постоянная R . Температуру воздуха мы также принимаем за константу 18°C ¹⁶.
3. Коэффициент трения шара о воздух мы принимаем равным 0.5 (турбулентный режим течения). В предыдущей задаче о «земноводном» ныряльщике мы принимали во внимание, что обтекание может быть ламинарным, переходным и турбулентным. Обтекание парашютиста воздухом только турбулентное!

¹⁴ Постановка задачи о парашютисте возникла под влиянием знаменитого прыжка с парашютом в 2012 г. из стратосферы австрийца Феликса Баумгартнера (<http://lenta.ru/news/2014/02/02/video>). Подобный прыжок в октябре 2014 года повторил Алан Юстас — исполнительный директор фирмы Google (<http://www.profile.ru/mir/item/87941-ispolnitelnyj-direktor-google-pobil-rekord-vysoty-dlya-pryzhkov-iz-stratosfery>).

¹⁵ Эта «константа» зависит, конечно, от высоты над уровнем моря, но на наших высотах (до 30 км) этим можно пренебречь. Читатель может подправить барометрическую формулу так, чтобы она работала и при $h < 0$ m: у парашютиста не открылся парашют и он спасается в... глубоком колодце.

¹⁶ Еще одна метрологическая ремарка (предыдущая была о единице вязкости). Преподаватель физики, взглянув на барометрическую формулу на рис. 24 сразу воскликнет: «Как! Мы студентами ставим двойки за такую запись! Температура должна тут быть сугубо в кельвинах, а не в градусах Цельсия, а давление в паскалях, а не в атмосферах! Формула неверна!». Учитель же литературы тут может вспомнить отрывок из чеховской «Дамы с собачкой»: «Однажды он шел к ней таким образом в зимнее утро (посыльный был у него накануне вечером и не застал). С ним шла его дочь, которую хотелось ему проводить в гимназию, это было по дороге. Валил крупный мокрый снег.

— Теперь три градуса тепла, а между тем идет снег, — говорил Гуров дочери. — Но ведь это тепло только на поверхности земли, в верхних же слоях атмосферы совсем другая температура.»

$$\begin{aligned}
\rho_{man} &:= 950 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} & h_0 &:= 30 \text{ km} & h_1 &:= 3 \text{ km} & v_0 &:= 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
& & r_0 &:= 30 \text{ cm} & r_1 &:= 2.5 \text{ m} & & \\
V_0 &:= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3 = 113.097 \text{ L} & V_1 &:= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_1^3 = 65 \text{ m}^3 \\
mass &:= V_0 \cdot \rho_{man} = 107.442 \text{ kg} \\
r(h) &:= \text{if}(h > h_1, r_0, r_1) & V(h) &:= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r(h)^3 & S(h) &:= \pi \cdot r(h)^2 \\
\rho(h) &:= \left\{ \begin{array}{l} T \leftarrow 18 \text{ }^\circ\text{C} \\ M \leftarrow 28.9644 \frac{\text{gm}}{\text{mole}} \\ p \leftarrow 1 \text{ atm} \cdot \exp\left(\frac{-M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}\right) \\ \rho_{возд} \leftarrow \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \end{array} \right. & \eta &:= 1.8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{m}^2} \\
& & \rho(30 \text{ km}) &= 0.036 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
& & k &:= 0.5
\end{aligned}$$

Рис. 23. Исходные данные для расчета прыжка с парашютом

Система дифференциальных уравнений, к которой сводится задача о прыжке парашютиста, идентична той, которая показана на рис. 20, с той лишь разницей, что функция $k(h(t), v(t))$ заменена на константу k , а вместо записи $v(t)^2 \cdot \text{sign}(v(t))$ для разнообразия вставлена уже нами оговоренная запись $v(t) \cdot |v(t)|$. Наш парашютист в отличие от ныряльщика по идее движется только вниз и его скорость всегда должна быть отрицательной. Но без данного уточнения функция **Odesolve** отказывается решать задачу. И это связано со скачками скорости при раскрытии парашюта.

На рисунке 24 показан график изменения высоты полета парашютиста во времени. Функция **root** (поиск нуля функции) позволила нам уточнить время раскрытия парашюта (примерно 2 минуты с момента старта) и общее время полета (семь минут и 37 секунд¹⁷).

¹⁷ Система единиц измерения, встроенная в Mathcad, позволяет использовать и недесятичные единицы измерения, от которых человечеству так и не удалось избавиться. Но попытки были. Десятичное время было введено во время Великой французской революции (которую мы уже упоминали в дивертисменте 3) декретом конвента от 5 октября 1793 года с дополнениями 24 ноября. Сутки от полуночи до полуночи делились на 10 десятичных часов, час на 100 десятичных минут, а минута на 100 десятичных секунд (https://ru.wikipedia.org/wiki/Десятичное_время). Mathcad также умеет переводить длины в британские футы и дюймы. Встроенная в Mathcad единица FIT переведет метр в три фута и три плюс 47/127 дюйма.

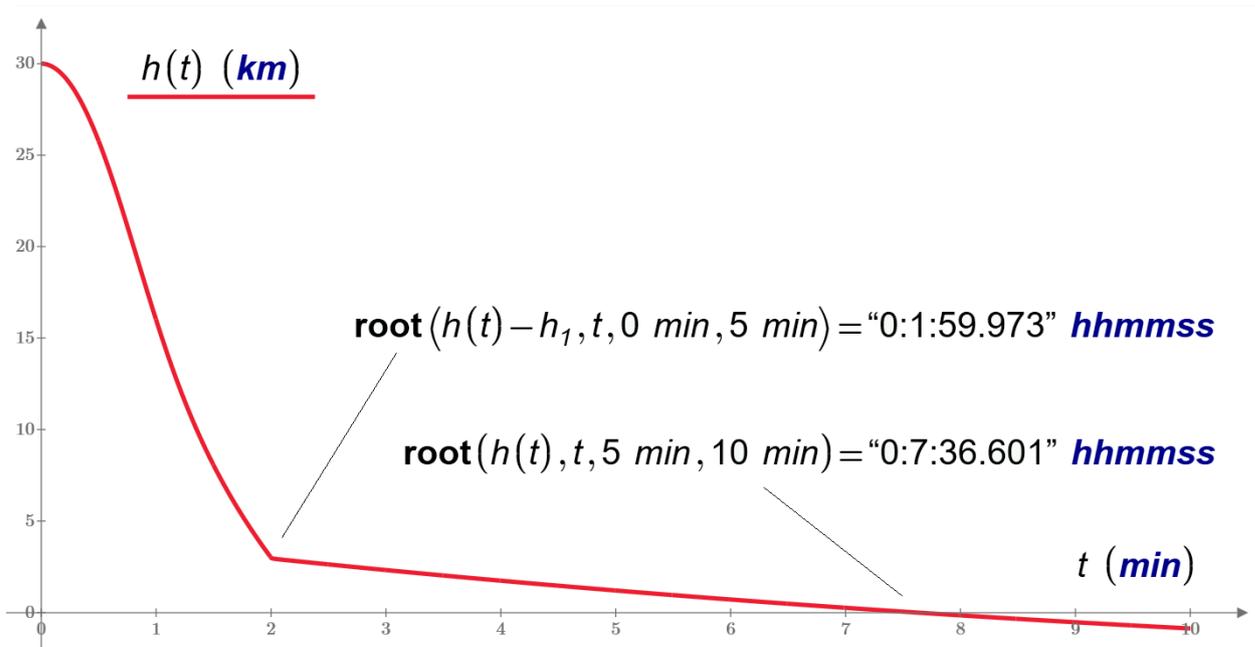


Рис. 24. График полета парашютиста

Фазовый портрет (вернее, полупортрет – портрет в профиль) парашютиста показан на рис. 25. Скорость парашютиста растет до максимального значения 1244 kph на высоте 19. km, затем начинает падать за счет увеличения плотности воздуха, потом скачком уменьшается и плавно снижается до скорости приземления. Трудно говорить о точности найденных параметров математической модели парашютиста, но качественная расчетная картина прыжка парашютиста оказалась вполне правдоподобной.

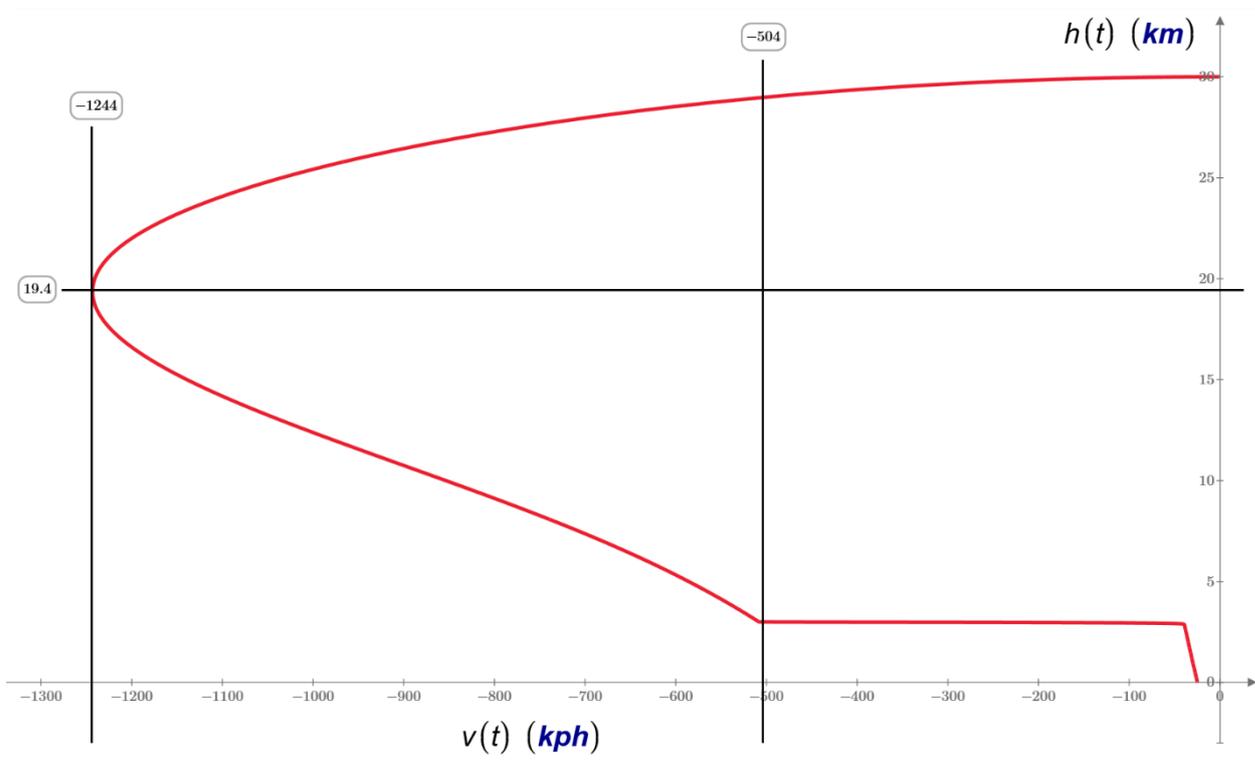


Рис. 25. Фазовый портрет парашютиста

Читатель тут может законно возразить – а причем тут маятник!? Но из парашютиста тоже можно сделать своеобразный маятник. Если на земле построить глубокий колодец или даже шахту горизонтального лифта (см. выше) и направить туда парашютиста с нераскрывшимся парашютом, то можно подсчитать, на какой глубине вес парашютиста сравняется с архимедовой силой. Парашютист, покачиваясь вверх-вниз (см. рис. 23), постепенно зависнет на данной глубине. Потом ему туда бросят веревку и вытащат на поверхность Земли. А на веревке парашютист будет покачиваться. Вот вам еще один маятник!

Предлагаем читателям сделать этот расчет, изменив перед этим барометрическую формулу (рис. 23), учтя в ней изменение g по глубине. Заодно и по высоте!

Математические модели ныряльщика и парашютиста – это 1D-модели, которые при желании можно перевести на плоскость (2D) или в пространство (3D). Но тут следует помнить, что силу сопротивления среды нельзя так просто раскладывать на отдельные проекции, как мы это делали с силой инерции – с произведением массы на ускорение (ньютоновское толкование инерции¹⁸). Нельзя просто перемножить квадрат горизонтальной или вертикальной проекции скорости на коэффициент трения – нужно умножить весь квадрат скорости на данный коэффициент, а потом раскладывать силу трения на отдельные составляющие. Иначе может получиться так, что тело по горизонтали движется в ламинарном режиме, а в вертикальном – в турбулентном. Эту особенность расчетов движения тел в вязкой среде подсказал авторам на форуме Mathcad англичанин Алан Стевенс (Alan Stevens). Эта ремарка касается случая, когда мы отказываемся от линейной модели (работа с коэффициентом трения – см. рис. 23) и переходим к нелинейности (коэффициент трения – это функция; см. рис. 19).

Можно также отметить, что не только сами люди, но и сам пакет Mathcad часто «обижает великого Ньютона». На рисунке 26 показан расчет ускорения свободного падения g на поверхности Земли через три величины G (гравитационная постоянная), R (радиус Земли) и M (ее масса).

Так вот после ввода нами гравитационной постоянной G эта величина была тут же выведена пакетом Mathcad... без ньютонов, пардон, без Ньютона.

¹⁸ А еще есть и «даламберова сила инерции». Она вводится в инерциальных системах отсчета для получения формальной возможности записи уравнений динамики в виде более простых уравнений статики. А есть и «эйлерова сила инерции». Она используется при рассмотрении движения тел в неинерциальных системах отсчета (https://ru.wikipedia.org/wiki/Сила_инерции).

$$G := 6.6720 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} = (6.672 \cdot 10^{-11}) \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

$$R := 6371 \text{ km}$$

$$M := 5.976 \cdot 10^{21} \text{ tonne}$$

$$g := G \cdot \frac{M}{R^2} = 9.823 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$V := \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 = (1.083 \cdot 10^{12}) \text{ km}^3$$

$$\rho := \frac{M}{V} = 5.517 \frac{\text{gm}}{\text{cm}^3}$$

Рис. 26. Расчет ускорения свободного падения на уровне земли

А вообще-то рисунок 26 приведен здесь для того, чтобы показать, во-первых, связь g с параметрами Земли (M – масса, R – радиус) и, во-вторых, для того, чтобышний раз подчеркнуть удобство ведения в среде Mathcad не только сложных и неоднозначных¹⁹ (см. выше), но и простых расчетов с пересчетом единиц измерения.

Дивертисмент 8. Медвежья услуга языков программирования и электронных таблиц

Языки программирования и электронные таблицы сыграли с нами злую шутку — они отучили нас работать с физическими величинами, что неудобно и чревато ошибками. Вводя в переменную значение, мы должны вводить только число, а единицу измерения этого числа мы должны держать в голове. Пакет Mathcad исправил это ненормальное положение вещей. Теперь компьютер не только считает числа, но и сам переводит единицы измерения. Кроме того, решена проблема псевдоэмпирических формул – физических формул, которые человек намерено исказил для удобства ручных расчетов с использованием нестандартных единиц измерения [13].

Конец дивертисмента 8

Приемы, изложенные выше, годятся и для создания моделей составных маятников – маятников-поездов, когда к одному маятнику прицеплен второй, к нему третий и т. д. На рисунке 27 помещены два кадра анимации четырехзвенного маятника с жесткими подвескам. На сайте статьи читатель найдет анимации маятников с двумя, тремя, пятью и восемью звеньями. Рассчитать такой маятник-поезд можно, несколько усложнив дифференциальные уравнения – приписав к ним слагаемые, учитывающие тот факт, что к маятнику прикреплена еще одна нить (здесь спица) соседнего маятника. Главное тут, чтобы функция **Odesolve** справилась с новой усложненной задачей и не стала «врать»²⁰. Тут опять же необходимо оценить правильность решения через баланс энергий (см. рис. 11), например.

¹⁹ А это ключевое слово данной статьи, если учитывать дивертисмент об отсутствии счастья в жизни.

²⁰ На сайте статьи помещена анимация движения такого ранее не исследованного маятника: к большому маятнику прикреплены два поменьше разного веса и разной длины. Сначала маятник качается более-менее

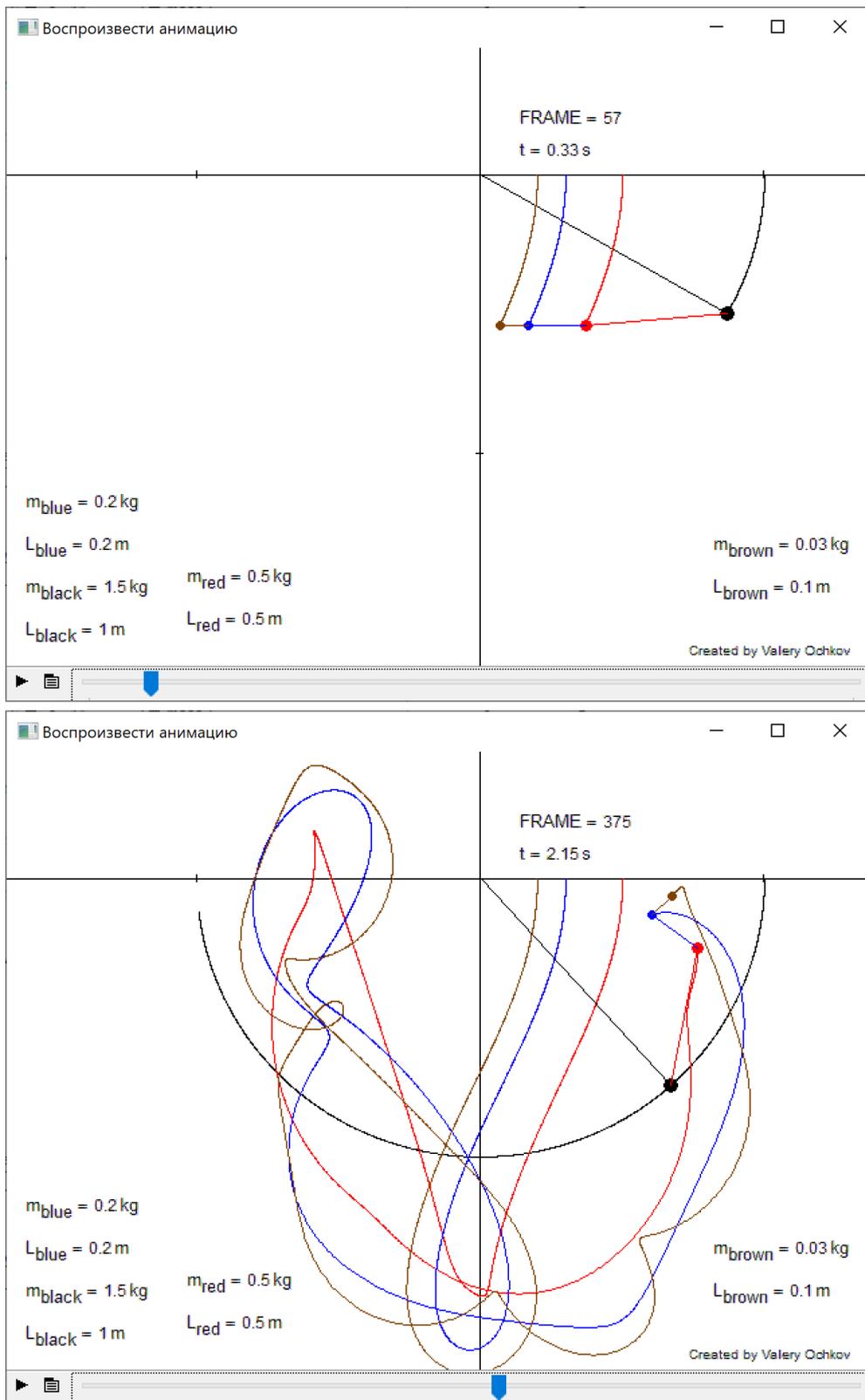


Рис. 27. Кадры анимации четырехзвенного маятника

От n -звенных маятников (маятников поездов) несложно перейти к маятнику-руке и маятнику-ноге.

правильно, а потом начинает дергаться, что является следствием накопления ошибок функцией Odesolve. Такое явление наблюдалось при анимации маятника-яблока (рис. 14).

7. Маятник-пешеход или заявка на Шнобелевскую премию

А вообще-то самый распространенный маятник – это наши руки и ноги, период колебания которых определяют темп ходьбы или бега. Давайте исследуем этот процесс с оглядкой на Шнобелевскую премию. И поводом для этого будет следующее авторское наблюдение.

Первой автор статьи заметил, что после прогулки в парке его коричневые ботинки всегда оказываются забрызганные грязью на носке и требуют чистки, а черные – нет. Был проведен контрольный заход в парк: автор надел на ноги два разных ботинка (рис. 28), установил у края дорожки несколько видеокамер, которые зафиксировали такой факт. Капли воды, соскакивающие при ходьбе с мыска левого (коричневого) ботинка летели по особой траектории и приземлились аккуратно на носок ботинка (вернее «неаккурат»!). С левым же, с черным ботинком такого не происходило: капли приземлялись на землю перед ботинком.



Рис. 28. Авторские ботинки после прогулки по парку

Причиной такого явления является рант коричневого ботинка, который намного больше ранта черного ботинка. В настоящее время разрабатывается авторская математическая модель процесса ходьбы по лужам в целях разработки рекомендаций обувной промышленности для... см. начало этого раздела статьи.

Часто забрызганными оказываются и задки ботинок, брюки или чулки у некоторых людей. Тут наше исследование поможет выяснить, что является причиной этого неприятного явления – особенность походки или особенность обуви людей.

И последнее. Подходы к решениям, описанные в данной статье, годятся для моделирования свободного полета не только у Земли, но и в космическом пространстве [12].

Литература:

1. Очков В. Ф. MCS на занятиях по математике, физике, информатике... // Компьютерные учебные программы и инновации. № 3. 2008. С. 187-194 (twt.mpei.ac.ru/ochkov/Pendulum)

2. Valery Ochkov. 2⁵ Problems for STEM Education. Chapman and Hall/CRC. 2020. 368 Pages - 488 B/W Illustrations ISBN 9780367345259 - CAT# 321887 (<https://www.crcpress.com/25-Problems-for-STEM-Education/Ochkov/p/book/9780367345259>)
3. Очков В.Ф., Бобряков А.В., Хорьков С.Н. Гибридное решение задач на компьютере // Cloud of Science. Том 4 № 2. 2017. С. 5-26
(https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_14_168.pdf)
4. Очков В. Ф. Преподавание математики и математические пакеты // Открытое образование. № 2, 2013. С. 23-34 (<http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/OchkovMath-pdf.pdf>)
5. Ochkov, V. F., Bogomolova, E. P. Teaching Mathematics with Mathematical Software, Journal of Humanistic Mathematics, Volume 5 Issue 1 (January 2015), pages 265-285
(http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/teaching_of_math.pdf)
6. Очков В. Ф., Писачич К. Путешествие из Петербурга в Москву или Свет в конце туннеля // Информатика в школе. №4. 2015. С. 58-61 (<http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/Tunnel.pdf>)
7. Valery Ochkov, Katarina Pisačić. Journey from St. Petersburg to Moscow or Model of Gravity Train in Mathcad // Technical Journal University North Croatia, Vol. 9, No. 1. pp. 1-5
(<http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/SPB-Moscow-Train.pdf>)
8. И. Н. Снеддон, Д. С. Берри. Классическая теория упругости. Вузовская книга. 2019
9. Очков В. Ф., Богомолова Е. П. Интерполяция, экстраполяция, аппроксимация или «Ложь, наглая ложь и статистика» // Cloud of Science. Т. 2, № 1. 2015. С. 61-88
(http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/CoS_2_1.pdf)
10. Korobov V.I., Ochkov V.F. Chemical Kinetics with Mathcad and Maple // Springer, 2011, ISBN 978-3-7091-0530-6, 1st Edition., 2011, XI, 344 p. 252 illus.
11. Кудинов А. А. Гидрогазодинамика. Учебное пособие. Издательство: ИНФРА-М, 2011
12. Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А., Писачич К. Движения планет: расчет и визуализация в среде Mathcad или Часы Кеплера // Cloud of Science. Т. 2, № 2. 2015. С. 177-215 (<http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/Planets.pdf>)
13. Очков В.Ф. Физические и экономические величины в Mathcad и Maple (Серия «Диалог с компьютером»). М.: Финансы и статистика, 2002